

VI Seminario de Primavera
La enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA

LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN PISA

Luis Rico
Universidad de Granada

El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (*Programme for International Student Assessment, PISA*) se propone establecer en qué medida los jóvenes de 15 años al finalizar la escolaridad obligatoria están preparados para satisfacer los desafíos de las sociedades de hoy. El modo en que los sistemas educativos preparan a los estudiantes para que puedan desempeñar un papel como ciudadanos activos se considera un dato importante sobre el desarrollo de una sociedad. Establecer indicadores de calidad con los que expresar cómo los sistemas educativos alcanzan esa formación es una de las finalidades principales de la evaluación PISA/ OCDE. Se trata de un programa cooperativo, de carácter cíclico, con un sistema internacional de control y gestión desarrollado por la OCDE, que permite generar indicadores de los logros en educación y que se lleva a cabo mediante una evaluación internacional (OCDE, 2005a).

Esta evaluación se orienta a valorar el rendimiento acumulado de los sistemas educativos; pone el foco en la alfabetización o formación básica en los dominios cognitivos de la lectura, las matemáticas y las ciencias. Las pruebas se llevan a cabo cada tres años y ofrecen a los responsables de la política educativa de los países participantes información relevante para dar seguimiento a los resultados de los estudiantes a lo largo del tiempo, evaluar las fortalezas y debilidades de sus propios sistemas y conocer la relación con los resultados de otros países. El foco de esta evaluación se centra en establecer si los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana, en vez de limitarse a conocer cuáles contenidos han aprendido y son capaces de reproducir (OCDE, 2003).

La OCDE ha publicado los resultados finales correspondientes a la evaluación de 2003 en el informe *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003* (OCDE, 2004), traducido y editado en español por Santillana como *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana* (OCDE, 2005b). La evaluación en matemáticas ocupa un papel central en la evaluación de ese año. Un resumen de los resultados de los escolares españoles lo encontramos en Castro y Molina (2005).

El estudio PISA se concibe como una herramienta para contribuir al desarrollo del capital humano de los países miembros de la OCDE. Tal capital lo constituyen los conocimientos, destrezas, competencias y otros rasgos individuales, que son relevantes para el bienestar personal, social y económico. La información en que se sustenta procede de los resultados obtenidos en pruebas estandarizadas de papel y lápiz que proporcionan estudiantes de 15 años. Las pruebas son comunes, siguen procedimientos de aplicación comunes y se llevan a cabo por evaluadores externos sobre muestras representativas de estudiantes de cada uno de los países participantes. La evaluación permite obtener indicadores sobre alfabetización de los escolares en términos de los conocimientos y destrezas necesarios para la vida adulta (González y Lupiáñez, 2005; Rico, 2005).

La noción de competencia es central en el estudio PISA. En diversos informes editados por la OCDE a lo largo del proceso de evaluación, especialmente en el informe final de 2003, la noción de competencia se utiliza en distintos momentos y con distintos significados. Nos proponemos en este trabajo revisar los significados que hemos

encontrado sobre la idea de competencia en el Informe PISA 2003, a través de sus usos e interpretaciones.

En los diferentes informes relacionados con la evaluación de PISA 2003 destacan cuatro apartados, sobre los que vamos a reflexionar.

Primero: Dominio que se evalúa, al que se denomina Alfabetización Matemática de los estudiantes y que es distinto del currículum.

Segundo: Marco teórico y componentes que establecen la evaluación del dominio: Contenido, Contexto y Competencias.

Tercero: Variables y Niveles de complejidad para el diseño de los instrumentos de evaluación.

Cuarto: Estudio empírico: análisis y escalamiento en niveles de las competencias de los escolares.

1. Definición del Dominio

El dominio sobre matemáticas que se estudia en el proyecto PISA 2003 se conoce como Alfabetización Matemática -*Mathematical Literacy*- (OCDE, 2003), y también se denomina Competencia Matemática (OCDE, 2004; OCDE 2005b). Este dominio se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o enuncian problemas matemáticos en una variedad de situaciones y dominios.

Para el estudio PISA/ OCDE *Alfabetización o Competencia Matemática* es la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano.

PISA define la alfabetización o competencia matemática de los escolares reiteradamente como “*la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo*” (OCDE, 2003, p. 24; OCDE, 2004, p. 3).

El término *el mundo* significa la posición natural, cultural y social en la que viven los individuos. *Usar e implicarse con las matemáticas* significa no sólo utilizar las matemáticas y resolver problemas matemáticos sino también *comunicar, relacionarse con, valorar* e incluso, *apreciar* y *disfrutar* con las matemáticas. La frase: *su vida individual* se refiere a la vida privada, la vida profesional, la vida social con compañeros y familiares, así como a la vida como ciudadanos de una comunidad.

El informe recuerda que, para los individuos, las matemáticas pueden suponer la extensión con la que disponen su conocimientos matemáticos pero también la amplitud con la que pueden activar los conocimientos y destrezas matemáticas para resolver problemas, principalmente en situaciones de la vida real. El estudio PISA/ OCDE apuesta por entender las matemáticas como conjunto de procesos que proporcionan respuesta a problemas. La concepción en que se sustenta considera que las matemáticas escolares deben priorizar las *tareas de encontrar (problemata)*, sobre las *tareas de probar (teoremata)*.

Esta evaluación se centra en el uso por los estudiantes de unas herramientas matemáticas para resolver y dar respuesta a problemas y necesidades, poniendo en funcionamiento unas determinadas competencias.

La consideración de las matemáticas como “modo de hacer” y la noción de alfabetización responden a un modelo funcional sobre aprendizaje de las matemáticas. Este modelo postula:

- unas tareas contextualizadas,
- unas herramientas conceptuales,
- un sujeto.

Cuando el sujeto tratar de abordar las tareas mediante las herramientas disponibles, moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los procesos correspondientes (Rico y cols, 1997).

Así, en su relación con el mundo real, los ciudadanos se enfrentan regularmente a situaciones matemáticas cuando compran, viajan, se alimentan, pagan sus impuestos, gestionan sus finanzas personales, organizan su tiempo y sus entornos vitales, juzgan cuestiones políticas, y muchas otras, en las que usan el razonamiento cuantitativo, relacional o espacial. En estas y en muchas otras ocasiones tienen que mostrar su competencia matemática para clarificar, formular y resolver problemas ya que, en todos estos casos, abordan y resuelven cuestiones mediante herramientas matemáticas. La competencia en matemáticas se considera parte principal de la preparación educativa puesto que ideas y conceptos matemáticos son herramientas para actuar sobre la realidad. Por ello, la evaluación en matemáticas se centra sobre esta competencia general como finalidad esencial del programa PISA.

El término *alfabetización* destaca en los primeros informes de PISA y se elige para subrayar que el conocimiento matemático y las destrezas, tal como están definidos en el currículo tradicional de matemáticas, no constituyen el foco principal de atención. Por el contrario, el énfasis se hace sobre el conocimiento matemático puesto en funcionamiento en multitud de contextos diferentes, por medios reflexivos, variados y basados en la intuición personal. Por supuesto, para que este uso sea posible y viable, son necesarios una buena cantidad de conocimientos matemáticos básicos y de destrezas; tales conocimientos y destrezas forman parte de esta definición de alfabetización.

El foco de la evaluación PISA 2003 se centra, pues, en *cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido.*

Cuando se refiere al dominio general que se evalúa, el Proyecto PISA entiende por *competencia* el conjunto de capacidades puestas en juego por los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

Un buen nivel en el desempeño de estas capacidades muestra que un estudiante es competente, ya que está matemáticamente alfabetizado o letrado. Atreverse a pensar con ideas matemáticas es la descripción de un ciudadano matemáticamente competente. En el uso de las herramientas matemáticas en contextos cotidianos se manifiesta la competencia matemática de los escolares.

Alfabetización o competencia matemática general es un constructo que sirve para caracterizar la actuación global del sujeto dentro del modelo funcional postulado para las matemáticas escolares. El dominio de evaluación es la competencia o alfabetización matemática del estudiante, entendida con este significado general. El concepto que utiliza PISA es mucho más amplio que la idea tradicional de alfabetización, se considera como algo continuo no como un valor dicotómico que se presenta o no se presenta. Por ello los traductores del informe al castellano eligen el término general de competencia para traducir *literacy* (OCDE, 2005b). La alfabetización o competencia matemática se presenta como finalidad general en la formación de los estudiantes de matemáticas, y establece las prioridades en el estudio PISA. Marín y Guerrero (2005) y Recio y Rico (2005) subrayan la importancia de esta noción de competencia dentro de las finalidades del currículo de matemáticas de secundaria.

2. Marco teórico y componentes que establecen el dominio

El marco teórico del estudio PISA se sostiene en la hipótesis de que aprender a *matematizar* debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes (OCDE, 2003). Dentro de ese marco la actividad matemática o, también, actividad de matematización consiste en la resolución de problemas. Cuando se analiza la actividad de los matemáticos al resolver problemas de modo experto ésta se puede analizar como compuesta por distintas fases.

La primera fase implica traducir problemas extraídos de un contexto del mundo real al mundo matemático, proceso que se denomina Matematización Horizontal.

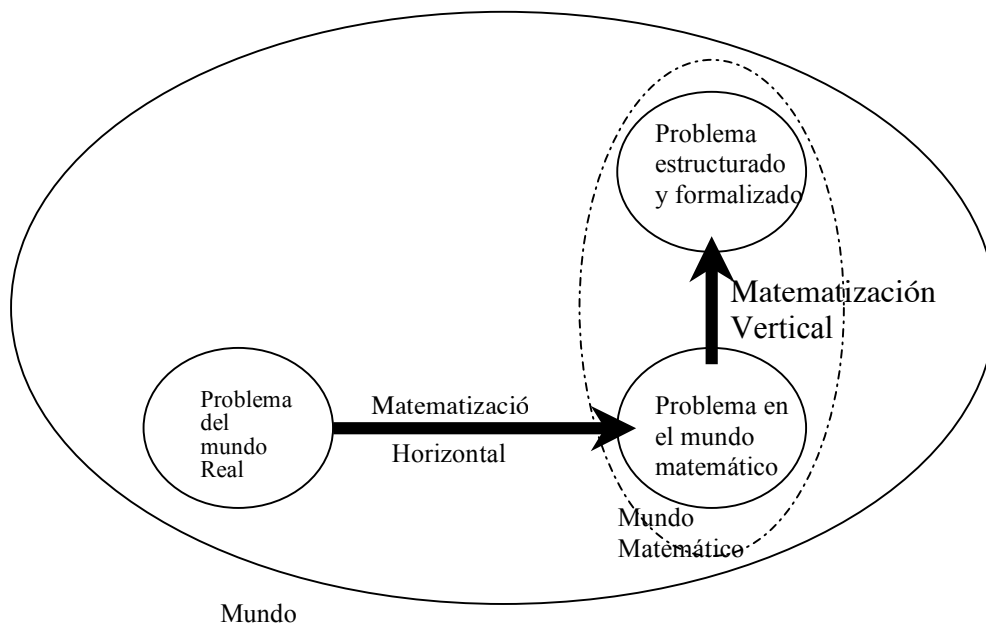
Hacer matemáticas horizontalmente incluye actividades como:

- Identificar matemáticas relevantes en un contexto general.
- Plantear interrogantes.
- Enunciar problemas.
- Representar el problema de un modo diferente.
- Comprender la relación entre lenguaje natural, lenguaje simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
- Reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos.
- Traducir el problema a un modelo matemático.
- Utilizar herramientas y recursos adecuados.

Una vez traducido el problema a una expresión matemática el proceso puede continuar. El experto o el estudiante pueden plantearse cuestiones en las que se utilizan conceptos y destrezas matemáticas.

Esta segunda fase es la Matematización Vertical, e incluye:

- Usar diferentes representaciones.
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.
- Argumentar y Generalizar.



De este modo se expresa gráficamente la conexión entre ambos procesos.

La última fase en la resolución de un problema implica reflexionar sobre el proceso completo de matematización y sus resultados. Los estudiantes deben interpretar los resultados con actitud crítica y validar el proceso completo.

Algunos aspectos de este proceso de validación y reflexión son:

- Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.
- Comunicar el proceso y la solución.
- Criticar el modelo y sus límites.

Los modos de actuación de los sujetos, requeridos en cada una de las fases, muestran sus capacidades y habilidades cuando trabajan con las matemáticas en contextos en los que es necesario utilizar este tipo de herramientas.

Estas capacidades y habilidades puestas en juego muestran que una persona es competente en matemáticas, son expresión de su competencia matemática. Los objetivos de aprendizaje expresan de manera concreta las habilidades que se necesitan para un determinado tema y en un determinado momento (Pajares, Sanz y Rico, 2004).

3. Evaluación

La evaluación PISA se propone, por tanto, establecer qué conocimientos, capacidades y habilidades pueden activar los alumnos a los que se les presentan problemas, es decir, medir hasta qué punto son matemáticamente competentes para resolver los problemas con éxito.

El programa OCDE/PISA elige preparar un conjunto de tareas mediante las que evaluar el dominio general –*Alfabetización o Competencia matemática*– teniendo en cuenta las diferentes fases del proceso de matematización. Cada tarea está vinculada a un contexto que puede tratarse como un problema matemático.

La estrategia escogida para contemplar el proceso de matematización y atender al dominio que se evalúa tiene en cuenta tres variables o dimensiones. Las tres dimensiones, que establecen la tarea y caracterizan aquello que se evalúa, son:

1. El *contenido matemático* que se debe utilizar para resolver el problema.
2. La *situación o contexto* en que se localiza el problema.
3. Las *competencias o procesos* que deben activarse para conectar el mundo real, donde surge el problema, con las matemáticas y resolver entonces la cuestión planteada.

Estas tres dimensiones corresponden a los tres componentes del modelo funcional antes descrito, en el cual un sujeto aborda unas tareas mediante las herramientas disponibles y para ello moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de unos procesos determinados. Los contenidos muestran el modo en que se organizan las herramientas conceptuales; las tareas son problemas del mundo real, que se ubican en distintos contextos y proceden de diversas situaciones. Los diferentes procesos que llevan a cabo los sujetos ponen de manifiesto distintas competencias.

Se presenta aquí un segundo significado del término *competencia*, el cual permite concretar el significado general anterior mediante diversos tipos de capacidades de análisis, razonamiento y comunicación que se ponen en juego por los estudiantes cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. En el diseño previo que establecía el marco para la evaluación, esta tercera dimensión se denomina *competencias* (OCDE, 2003, pp. 40-41), y se presenta como variable a considerar en los ítems de evaluación. En el informe final se opta por destacar la idea procesual y se pasa denominar *procesos* a esta variable (OCDE, 2004, pp. 40-

41). En un caso el foco de atención está en los propios procesos, mientras que en el otro parece destacarse al sujeto que los pone en práctica. No obstante, la caracterización sigue siendo la misma: las competencias o procesos establecen los distintos valores de la tercera dimensión del modelo funcional, aquella que afecta a los modos en que el sujeto se enfrenta a un problema.

Vemos el planteamiento general que establecen las tres variables que determinan la evaluación del dominio.

3.1. Contenidos Matemáticos

Las ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han inventado y desarrollado como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, social, científico y mental.

Las matemáticas, como todas las disciplinas, tienen una tradición en el modo de organizar sus contenidos, que se ha discutido y construido a lo largo de la historia. Sostenidas por una tradición de más de 200 años las escuelas organizan el currículo de matemáticas mediante contenidos temáticos: aritmética, geometría, álgebra, y otros. Estos tópicos reflejan ramas bien establecidas del pensamiento matemático y facilitan el desarrollo estructurado de un programa.

No obstante, en el modelo funcional que hemos presentado, el interés se centra sobre los fenómenos del mundo real que llevan a un tratamiento matemático. Al modelo funcional no le interesa tanto una clasificación convencional de las herramientas, es decir, la organización de los contenidos, cuanto destacar las herramientas por su funcionalidad, teniendo en cuenta los usos en que se ven implicadas.

Intentar establecer una clasificación de contenidos basada en los fenómenos que estudian presenta la dificultad de que éstos no están organizados lógicamente. La estrategia asumida en la evaluación PISA consiste en definir el rango del contenido que puede evaluarse haciendo uso de una aproximación fenomenológica para describir las ideas, estructuras y conceptos matemáticos. Esto significa describir el contenido en relación con los fenómenos y los tipos de problemas de los que surgieron, es decir, organizar los contenidos atendiendo a grandes áreas temáticas.

El estudio PISA/ OCDE hace una discusión de distintas posibilidades de organizar los contenidos desde una perspectiva fenomenológica (Devlin, 1994; Freudenthal 1973; Rucker, 1988; Steen, 1990) y opta por su estructuración mediante cuatro grandes ideas (OCDE, 2003, pp. 34-37).

Las ideas fundamentales, que satisfacen las condiciones de respetar el desarrollo histórico, cubrir el dominio y contribuir a la reflexión de las líneas principales del currículo escolar, son:

- Cantidad
- Espacio y forma
- Cambios y relaciones
- Incertidumbre

Estos cuatro grandes campos de herramientas matemáticas son los escogidos por el Proyecto PISA para evaluar la competencia matemática de los estudiantes al término de la educación obligatoria, que pasamos a glosar.

Cantidad: Esta categoría subraya la necesidad de cuantificar para proceder a organizar el mundo. Incluye todos aquellos conceptos involucrados en la comprensión de tamaños relativos, reconocimiento de patrones numéricos, uso de números para representar cantidades y atributos cuantificables de los objetos del mundo real. La cantidad se refiere al reconocimiento, procesamiento y comprensión de números, que se presentan de varios modos.

Estas herramientas responden a las necesidades de cuantificar, medir, ordenar, simbolizar y operar como vías para entender y organizar el mundo.

El razonamiento cuantitativo incluye el sentido numérico, la representación de números de varios modos, la comprensión del significado de las operaciones, cálculo mental y estimación.

Podemos localizar ítems correspondientes a esta categoría en el documento *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de problemas* (INECSE, 2005); los denominados *Estanterías* (p. 46), *Monopatín* (p. 52), *Niveles de CO₂* (p. 56) y *Esquema de escalera* (p. 65) ejemplifican distintas tareas dentro de esta categoría.

Espacio y forma: Las formas pueden considerarse como patrones. Los patrones geométricos sirven como modelos relativamente simples de muchos tipos de fenómenos. Casas, edificios, puentes, estrellas de mar, copos de nieve, planos de ciudades, cristales, espejos y sombras, son algunos ejemplos de formas del mundo real en la que se pueden localizar patrones. Los patrones geométricos sirven como modelos relativamente simples de muchos tipos de fenómenos y su estudio es posible y deseable a todos los niveles.

El estudio de las formas y construcciones requiere buscar similitudes y diferencias cuando se analizan los componentes de las formas y se reconocen según distintas representaciones y diferentes dimensiones.

El estudio de las formas está relacionado con el concepto de espacio cercano, lo cual requiere de la comprensión de las propiedades de los objetos y de sus posiciones relativas (Freudenthal, 1973). También significa entender las relaciones entre las formas y las imágenes o representaciones visuales. Los autores del estudio PISA/ OCDE subrayan que debemos ser conscientes de cómo vemos las cosas y por qué las vemos así; los estudiantes tienen que aprender a desenvolverse a través del espacio, de las formas y de las construcciones. Igualmente hay que entender cómo los objetos tridimensionales pueden representarse en dos dimensiones, cómo se interpretan las sombras, cuáles son sus perspectivas y sus funciones.

Los ítems denominados *Carpintero* (p. 36), *Escalera* (p. 60) y *Dados* (p. 61) ejemplifican distintas tareas dentro de esta categoría (INECSE, 2005).

Cambios y relaciones: Cada fenómeno natural es una manifestación del cambio; el mundo en nuestro entorno muestra una multitud de relaciones temporales y permanentes entre fenómenos. Algunos ejemplos los proporcionan los organismos cuando crecen y sus cambios, los ciclos de las estaciones, el flujo y reflujo de las mareas, los ciclos de empleo y desempleo, los cambios climáticos y los cambios en los indicadores económicos.

Algunos de los procesos de cambio pueden ser descritos y modelados directamente mediante funciones matemáticas: lineales, exponenciales, periódicas o logísticas, discretas o continuas.

Las relaciones matemáticas tienen usualmente la forma de ecuaciones o de desigualdades, pero también se presentan relaciones de naturaleza más general.

El pensamiento funcional, es decir, pensar en términos de y acerca de relaciones, es una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Las relaciones pueden representarse mediante una diversidad de sistemas, incluyendo símbolos, gráficas, tablas y dibujos geométricos. Distintas representaciones pueden servir para propósitos diversos y tener propiedades diferentes.

Los ítems denominados *Caminar* (p. 28), *Chatear* (p. 37) y *El mejor coche* (p. 64) ejemplifican distintas tareas dentro de la categoría de cambio y relaciones (INECSE, 2005).

Incertidumbre: Por incertidumbre se quieren entender dos tópicos relacionados: tratamiento de datos y azar. Estos fenómenos son la materia de estudio de la estadística y de la probabilidad, respectivamente.

Los conceptos y actividades que son importantes en esta área son la recolección de datos, el análisis de datos y sus representaciones, la probabilidad y la inferencia.

Los ítems denominados *Exportaciones* (p. 41), *Basura* (p. 47) y *Respaldo al Presidente* (p. 63) ejemplifican tareas dentro de la categoría de incertidumbre (INECSE, 2005).

La clasificación de contenidos del PISA/OCDE 2003 se sustenta en el análisis fenomenológico y fue ensayada en España con el currículum que establecía el Diseño Curricular Base (MEC, 1989). La versión del Informe PISA/ OCDE supone una revisión y mejora de aquella versión de comienzos de los noventa.

3.2. Situaciones y Contextos

Utilizar y hacer matemáticas en una variedad de situaciones y contextos es un aspecto importante de la Alfabetización Matemática. Trabajar con cuestiones que llevan por sí mismas a un tratamiento matemático, a la elección de métodos matemáticos y representaciones, depende frecuentemente de las situaciones en las cuales se presentan los problemas.

La situación es aquella parte del mundo del estudiante en la cual se sitúa la tarea. Las situaciones permiten establecer la localización de un problema en términos de los fenómenos de los que surge y que condicionan la cuestión problemática planteada. Los responsables del proyecto no mencionan explícitamente la fenomenología como un organizador relevante en el diseño y selección de las tareas escogidas para la evaluación de los estudiantes por lo que se refiere a contextos y situaciones. Sin embargo, está claro que la consideración de situaciones como una de las componentes para evaluar el dominio incorpora el análisis fenomenológico dentro del marco teórico que sustenta el proyecto OCDE/PISA. La segunda variable, que se refiere a la situación, toma cuatro valores que se identifican en la delimitación de tareas matemáticas y en la construcción de ítems.

PISA (OCDE, 2004) considera cuatro tipos de situaciones:

- Personales
- Educativas y Ocupacionales
- Públicas
- Científicas.

Situaciones personales son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. Los ítems *Caminar*, *Chatear* y *Monopatín* (INECSE, 2005), ejemplifican este tipo de situaciones.

Situaciones educativas, ocupacionales o laborales son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo.

Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo proponen al alumno una tarea que le impone una actividad matemática para encontrar su respuesta. Los ítems *Cubos*, *Carpintero* y *Escalera* (INECSE, 2005), ejemplifican situaciones de este tipo.

Situaciones públicas se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con la cual los estudiantes observen un aspecto determinado de su entorno.

Requieren que los alumnos activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones

importantes en la vida pública. Los ítems *Respaldo al Presidente* y *El mejor coche* (INECSE, 2005), ejemplifican situaciones de este tipo.

Situaciones científicas son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. Los ítems *Crecer*, *Basura* y *Niveles de CO₂* (INECSE, 2005), ejemplifican situaciones de este tipo.

3.3. Competencias o Procesos

El proyecto PISA considera que para la resolución de los problemas que se presentan en las tareas de evaluación, los estudiantes deben poner en práctica un conjunto de procesos, es decir, mostrar su dominio en un conjunto de competencias matemáticas generales. Se trata del segundo significado del concepto de competencia que ya hemos indicado.

Las competencias que establece un plan de formación se constituyen en elementos determinantes para establecer su calidad y permiten llevar a cabo su evaluación. La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se propone, mientras que su eficacia responde al modo en que éstas se logran en el medio y largo plazo.

El proyecto PISA enfatiza que la educación debe centrarse en la adquisición de unas competencias generales determinadas por parte de los alumnos de 15 años al término del periodo de su educación obligatoria, competencias que tienen por finalidad formar ciudadanos alfabetizados matemáticamente. Las competencias expresan los modos en que los estudiantes deben actuar cuando hacen matemáticas, es decir, los procesos a cuyo dominio está orientada la formación.

Ya hemos indicado que, en este caso, el concepto de competencia se identifica con el de proceso y pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de dichos conceptos y destrezas. Los objetivos, expresados en términos de capacidades o de dominio de determinados conceptos o procedimientos, se orientan hacia la consecución de una o varias competencias; son expresión de las prioridades formativas que proponen para un determinado momento. Las competencias generales o procesos, por el contrario, marcan metas a medio y largo plazo, responden a ciclos formativos más amplios y comprensivos.

El proyecto PISA, en tanto que evalúa la formación de los escolares al término de la educación obligatoria, enfatiza que dicha evaluación deberá centrarse en la adquisición de competencias generales por parte del alumno, dentro del modelo funcional propuesto. Estas competencias o procesos generales dan concreción a la competencia global o alfabetización matemática inicialmente descrita. Se trata de centrar la evaluación del sistema educativo en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho aprendizaje, que se expresa mediante las capacidades mostradas sobre una serie de competencias generales.

Las competencias o procesos generales elegidas por el proyecto PISA (OCDE, 2004, p. 40), son:

- Pensar y razonar
- Argumentar
- Comunicar
- Modelar
- Plantear y resolver problemas
- Representar
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

- Usar herramientas y recursos

Pensar y razonar incluye:

- plantear cuestiones propias de las matemáticas (cuántos hay? cómo encontrarlo? si es así, ...entonces?);
- conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a las cuestiones anteriores;
- distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas);
- entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.

Argumentar incluye:

- conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático;
- seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos;
- disponer de sentido para la heurística (Qué puede (o no) ocurrir y porqué?);
- crear y expresar argumentos matemáticos.

Comunicar incluye:

- expresarse uno mismo en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita;
- entender enunciados sobre estas materias de otras personas en forma oral y escrita.

Modelar Incluye:

- estructurar el campo o situación que va a modelarse;
- traducir la realidad a una estructura matemática;
- interpretar los modelos matemáticos en términos reales: trabajar con un modelo matemático;
- reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados;
- comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones);
- dirigir y controlar el proceso de modelización.

Plantear y resolver problemas incluye:

- plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados);
- resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.

Representar incluye:

- decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones;
- escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.

Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones incluye:

- decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural;
- traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal;
- manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas;
- utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

Uso de herramientas y recursos

Lo cual implica utilizar los recursos y herramientas familiares en contextos, modos y situaciones que son distintos del usos con el que fueron presentados.

A diferencia de las variables *Contextos* y *Situaciones*, que fueron ejemplificadas con anterioridad, la variable *Competencias* no admite una ejemplificación similar, como argumentamos a continuación.

4. Instrumentos

En el momento de seleccionar las tareas para diseñar los instrumentos de evaluación resulta factible clasificar éstas por el contenido que tratan y también por la situación en la que se presentan y el contexto al que se refieren. Tanto el contenido como la situación son variables de tarea, cuya identificación y selección no plantea dificultad especial, como hemos visto en los apartados anteriores y en los ejemplos publicados por el Ministerio de Educación y Ciencia (INECSE, 2005). Sin embargo, es difícil establecer con carácter previo cuál o cuáles procesos va a activar un alumno para dar respuesta a la cuestión o cuestiones planteadas. Las competencias no son variables de tarea sino variables del sujeto y, por ello, no es posible establecer a priori a cuál de los procesos elegidos corresponde asignar una tarea determinada; por lo general, será posible vincular una tarea con diversos procesos puesto que los sujetos que la resuelven lo pueden hacer de distintas maneras. El profesor puede proponer una tarea para evaluar una determinada competencia, pero eso no garantiza su ocurrencia.

La estrategia seguida por el proyecto PISA/OCDE en relación con las competencias antes enumeradas, considera tres clases de complejidad en los ítems propuestos. De este modo incluye una nueva variable de tarea, útil para evaluar las competencias, que ha mostrado su adecuación para analizar el modo en que las distintas competencias son requeridas como respuesta *a los distintos tipos y niveles de demandas cognitivas planteados por los diferentes problemas matemáticos* (OCDE, 2004).

Cada una de las tareas enunciadas admite tipos diferentes de complejidad, lo cual afecta al modo en que deben ejecutarse los correspondientes procesos. Dichas clases de complejidad para las tareas son:

- Primera clase: Reproducción y procedimientos rutinarios.
- Segunda clase: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.
- Tercera clase: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

Los ítems de Reproducción incluyen tareas relativamente familiares y que requieren, esencialmente, conocimientos usuales tales como conocimiento de representaciones de hechos y de problemas comunes, reconocimiento de equivalencias, el uso de objetos y propiedades matemáticas familiares, procesos rutinarios, aplicación de algoritmos estandarizados y de habilidades prácticas, manejo de expresiones con símbolos familiares y realización de operaciones sencillas. Los ítems *Caminar*, *Monopatín*, *Escalera* y *El mejor coche* son ejemplos de ítems de esta clase (INECSE, 2005).

Los ítems de Conexión abarcan problemas que no son meramente rutinarios pero que se sitúan aún en contextos familiares; plantean mayores exigencias en su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una situación o enlazar diferentes aspectos de la situación con el fin de desarrollar una solución. Los ítems *Carpintero*, *Estanterías*, *Niveles de CO₂* y *Respaldo al Presidente* ejemplifican esta clase de complejidad en las tareas (INECSE, 2005).

Los ítems de Reflexión requieren competencias que necesitan de comprensión y reflexión por parte del alumno, creatividad para identificar conceptos matemáticos

relevantes o establecer vínculos con los conocimientos adecuados para encontrar las soluciones. Estas competencias se requieren para problemas que exigen generalización, explicación o justificación de resultados. Los ítems *Chatear*, *Basura* y *El mejor coche* (pregunta 2) ejemplifican esta mayor complejidad en las tareas (INECSE, 2005).

El estudio de los instrumentos de evaluación y la delimitación de las variables de tarea lleva a los responsables del estudio PISA/ OCDE a contemplar la complejidad como una categorización de las tareas, que hace relación a la noción de competencia. El requerimiento de procesos más complejos, creativos o estructurados delimita distintos tipos de competencias en los estudiantes que, en principio, se concretan en tres clases. Alumnos más competentes llevarán a cabo procesos de mayor complejidad; alumnos menos competentes sólo trabajarán procesos de complejidad menor. En este caso la competencia de los estudiantes se refiere a las capacidades individualmente desarrolladas, que se ponen de manifiesto por el tipo de tareas abordadas con éxito. Este significado de la noción de competencia se considera como variable del sujeto, determinada mediante categorización teórica de la complejidad de las tareas.

5. Niveles de Competencias

La clasificación teórica de las tareas por el grado de complejidad requerido para los procesos implicados es genérica y algo imprecisa por su amplitud. Pero resulta útil para establecer la hipótesis de que los estudiantes que alcancen a dar respuesta a tareas de alta complejidad muestran el mayor nivel de competencia matemática, mientras que los alumnos que sólo alcancen a responder a las tareas de menor complejidad son los que tienen menor nivel de competencia matemática. Las respuestas de los sujetos a tareas con distintos niveles de complejidad permiten establecer niveles de competencia entre los estudiantes, en todo caso con las herramientas utilizadas y situación considerada. Esto se confirma con el escalamiento que se produce en las respuestas de los estudiantes ya que alumnos que resuelven problemas de mayor complejidad también responden a los problemas de complejidad inferior. No obstante, los datos empíricos muestran mayor riqueza de niveles que el planteamiento teórico en tres categorías. La clasificación de tareas no es suficiente para interpretar la variedad de respuesta de los estudiantes.

¿Cómo determinar entonces el nivel de competencia matemático alcanzado por un estudiante concreto? ¿y por un grupo de estudiantes? ¿y por los estudiantes de un país?

La respuesta a estas cuestiones es empírica y constituye el núcleo del estudio PISA/ OCDE. El informe final establece los niveles de complejidad de acuerdo con los resultados de la evaluación realizada; las tareas más complejas tienen, pues, una doble caracterización: teórica y empírica.

Los mejores alumnos muestran en su actividad distintos niveles de dominio en la ejecución de las tareas. De este modo se determinan empíricamente seis niveles de competencia, que admiten una descripción general y también una descripción más detallada por cada uno de los campos de contenido.

Cada nivel de competencia se caracteriza por los procesos o competencias empleados y por el grado de complejidad con que los alumnos los ejecutan al abordar tareas de dificultad creciente. De este modo es posible entender cada nivel de competencia matemática en relación con la maestría con que el alumno lleva a cabo las tareas matemáticas propuestas, es decir, muestra su competencia matemáticas (OCDE, 2004). En este caso la competencia no es una finalidad general de la educación matemática, ni tampoco un listado teórico de procesos cognitivos. Para llegar a esta noción de competencia hemos tenido que considerar los niveles de complejidad en una tarea, caracterizando esa noción en términos de la riqueza cognitiva de los procesos

implicados, la creatividad, la variedad de conceptos y relaciones involucrados, el juego de sistemas de representación y sus conexiones. La caracterización teórica del nivel de competencia requerido para abordar una tarea se complementa con el estudio empírico, derivado de la evaluación PISA 2003.

Los niveles establecidos se caracterizan empíricamente del siguiente modo:

Primer Nivel: Los alumnos saben responder a preguntas planteadas en contextos conocidos, donde está presente toda la información pertinente y las preguntas están definidas claramente. Son capaces de identificar la información y llevan a cabo procedimientos rutinarios al seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Segundo Nivel: Los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único sistema de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.

Tercer Nivel: Los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. También son capaces de elaborar escritos breves para exponer sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

Cuarto Nivel: Los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.

Quinto Nivel: Los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos.

Los alumnos de este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones relacionadas adecuadamente, caracterizaciones simbólicas y formales e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

Sexto Nivel: Los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de una manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos de este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, argumentos y su adecuación a las situaciones originales (OCDE, 2004, p. 47; OCDE, 2005b, p. 47 y 48).

6. Competencia matemática en el Informe PISA

Hemos considerado cuatro significados distintos sobre la noción de competencia en el Informe PISA, que ponen de manifiesto la riqueza y diversidad de matices con que se trabaja y el interés que tiene para su correcta interpretación.

En primer lugar hemos considerado la competencia como dominio de estudio. Esta idea la hemos visto como equivalente a la de alfabetización matemática y supone un modo global de entender el hacer matemáticas y la propia naturaleza del conocimiento matemático. Desarrollar la competencia matemática en los escolares al término de la educación obligatoria se convierte en finalidad principal de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entre las finalidades de los documentos curriculares está la Competencia Matemática, como modo global de resolver problemas prácticos.

El estudio PISA propone medir de modo continuo el conjunto de capacidades de los estudiantes, como expresión de su competencia.

En segundo lugar hemos considerado las competencias como conjunto de procesos generales que deben ponerse en práctica al resolver problemas matemáticos, por medio de cuya realización se muestra la competencia general. Estas competencias singularizan y concretan la finalidad global, estableciendo capacidades y habilidades específicas que ayudan a modular los objetivos, a establecer tareas escolares y caracterizar las propuestas de trabajo y las evaluaciones. El proyecto PISA establece ocho competencias o procesos matemáticos generales que orientan las tareas y ayudan a establecer el análisis de resultados y permiten caracterizar los niveles en el rendimiento de los alumnos, globalmente y en relación con cada área. Otras instituciones educativas establecen mediante estándares competencias similares a las de PISA (NCTM, 2000).

En tercer lugar, para caracterizar las tareas, el Informe PISA establece tres niveles de complejidad respecto de las competencias generales requeridas. El Informe habla de *grupos de competencias*, y en este caso se distinguen estos grupos por las demandas cognitivas implicadas en las tareas que los ejemplifican.

Finalmente, en cuarto lugar, se habla de las competencias como nivel alcanzado por los alumnos, que se determina empíricamente y se expresa en una escala. Cada nivel de competencia se caracteriza por lo que saben hacer los alumnos, en grupos de tareas de dificultad creciente. Cada nivel se describe en relación al tipo de competencias matemáticas que el alumno es capaz de realizar y el grado de complejidad con que las aborda. La distribución de los alumnos de cada país en cada uno de los niveles de competencias matemáticas consideradas ayudan a establecer el nivel y modo de alfabetización matemática de los estudiantes de ese país. También muestra las disparidades y desigualdades internas dentro de cada población, que proporciona indicadores sobre la equidad e igualdad de oportunidades en cada caso.

La noción de competencia es central en el estudio PISA y desempeña diferentes funciones:

- Expresa una finalidad prioritaria en la enseñanza de las matemáticas.
- Expresa un conjunto de procesos cognitivos generales que caracterizan un esquema pragmático de entender el hacer matemáticas.
- Concreta variables de tarea para los ítems en la evaluación; destaca por los grados de complejidad.
- Marca niveles de dominio en las tareas de hacer matemáticas.

Diferenciar entre los distintos significados de la noción de competencia es importante a la hora de realizar la lectura e interpretación del Informe PISA 2003. También es relevante para conocer los diferentes usos de una noción central en el análisis cognitivo de las matemáticas escolares.

Referencias:

- Castro, E. y Molina, M. (2005). Rendimiento en Competencias Matemáticas de los Estudiantes Españoles en el Informe PISA 2003, *Padres y Madres de Alumnos* Revista de la CEAPA nº 82.
- Devlin, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: Scientific American Library
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
- González, M. J. y Lupiáñez, J. L. (2005). ¿Qué valor social tiene el conocimiento matemático? *Padres y Madres de Alumnos* Revista de la CEAPA nº 82.
- INECSE (2004a). *Aprender para el mundo de mañana. Resumen de resultados PISA 2003*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- INECSE (2004b). *Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- INECSE (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Marín, A. y Guerrero, S. (2005). Una lectura del informe PISA desde la Secundaria. *Padres y Madres de Alumnos* Revista de la CEAPA nº 82.
- Ministerio de Educación y Ciencia (1989). *Diseño Curricular Básico. Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM
- OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE.
- OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París: OECD.
- OCDE (2005a). *Organisation for Economic Co-operation and Development*. <http://www.oecd.org/home>
- OCDE (2005b) *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid: Santillana.
- Pajares, R. Sanz, A. y Rico, L. (2004) *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Recio, T. y Rico, L. (2005) El Informe PISA 2003 y las matemáticas. *El País* 24.01.05.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M. y Segovia, I. (1997). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En Rico, L. (edt.) *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Rico, L. (2005) La Alfabetización Matemática y el Proyecto PISA de la OCDE. *Padres y Madres de Alumnos* Revista de la CEAPA nº 82.
- Rucker, R. (1988). *Mind Tools. The Mathematics of Information*. London: Penguin Book.
- Steen, L. (Ed.) (1990). *On the shoulders of Giants*. Washington DC: National Academy Press.