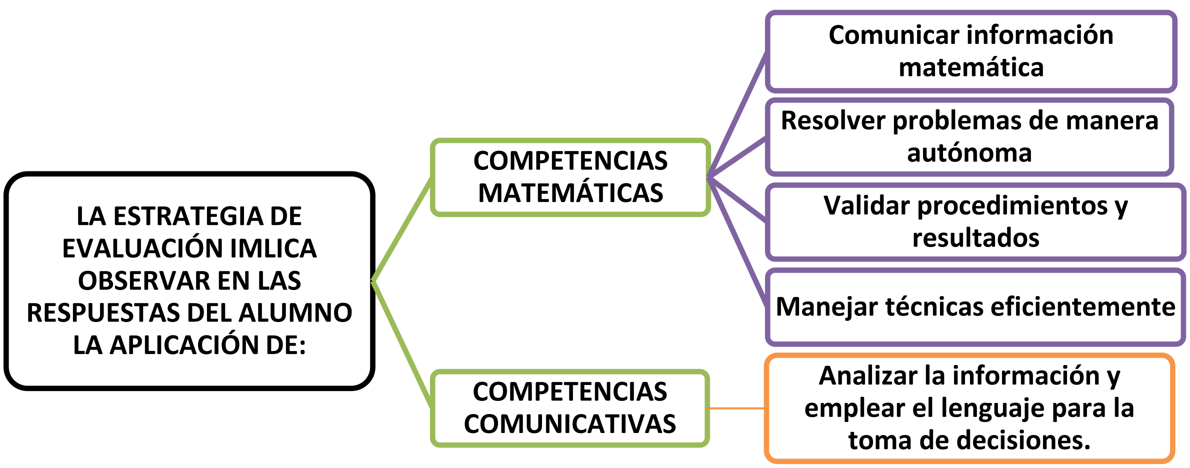
Presentación

El presente taller es con el fin de resolver problemas olímpicos, compartir estrategias de solución y las escalas de evaluación en las olimpiadas nacionales de matemáticas para alumnos de primaria y secundaria.

Se resolverán problemas de combinatoria, geometría y teoría de números.

Algunos de los problemas incluidos en este Cuadernillo formaron parte de los exámenes aplicados en la OEMEPS, de los distintos estados mismos que fueron tomados principalmente de Calendarios Matemáticos y de exámenes y problemarios de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (ANPM) o de otras Olimpiadas de Matemáticas.

La evaluación, a diferencia de otras acciones emprendidas para este fin, toma en cuenta el avance logrado y el grado de desarrollo de las competencias matemáticas mostradas en los procedimientos de solución.



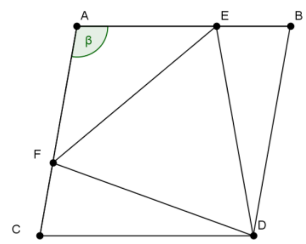
Proceso de evaluación

Cada problema alcanza hasta 7 puntos en la etapa nacional que son distribuidos durante el desarrollo de las estrategias que el alumno va siguiendo en la solución del problema y que logra plasmar de forma correcta y coherente**.**

1. **¿Cuánto mide el terreno?** Carlos midió el largo del terreno del patio de su tía con pasos de 36 cm. Después, su hermano Jorge midió el terreno con pasos de 27 cm. Quedaron marcadas en total 25 pisadas, pero a veces la misma marca correspondía a dos pisadas, una de Carlos y otra de su hermano. Determina el largo del terreno.

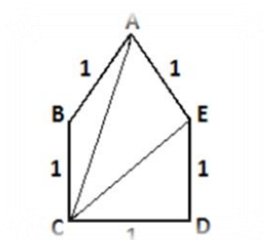
2. **Los palillos** Siete palillos iguales se colocan en la figura siguiente.

¿Cuánto mide el ángulo β?

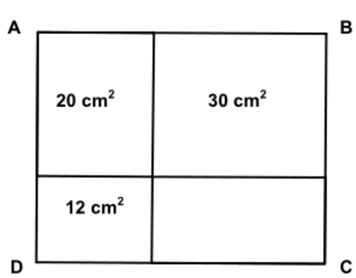


3. Se juntan un cuadrado y un triángulo equilátero para formar una figura como la mostrada

¿Cuánto mide el ángulo ACE?



4. Un rectángulo ABCD es dividido en cuatro rectángulos como se muestra en la figura. Las áreas de tres de ellos son las que están escritas dentro (no se conoce el área del cuarto rectángulo), ¿cuánto mide el área del rectángulo ABCD?

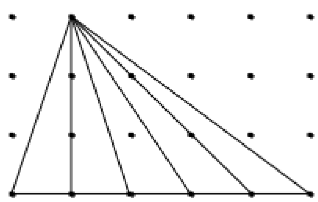


5. Se escriben los dígitos 1, 2, 3, 4 en cuatro papelitos que se guardan en una caja. Si dos de los papelitos se extraen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea múltiplo de 3?

6. Numeré 2014 tarjetas del 1 al 2014 y quité aquéllas que terminaban con 3. Después volví a numerar las que me quedaban y por último quité las que terminaban en 2. Al final, ¿cuántas tarjetas me quedaron?

7. ¿Cuántos números menores que 100 se pueden escribir usando los dígitos 2, 3 y 5?

8. Supón que los puntos están a una distancia de 1 cm., horizontal y verticalmente. Calcula la suma de las áreas de todos los triángulos que se pueden formar siguiendo las líneas que están marcadas en la figura.



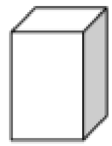
9. Se tienen dos relojes de arena, uno que mide 5 minutos y otro que mide 3 minutos. Si usamos sólo estos dos relojes, ¿cómo podemos medir 7 minutos?

10. *Encuentra todos los números entre 50 y 150 tales que si les restas 3 y luego los divides por 5, tienen residuo cero y el cociente es múltiplo de 7.*

11. Halla un número Capicúas de 4 cifras que se par y múltiplo de 6

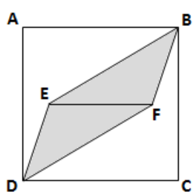
12. *Sea N el menor número entero positivo que multiplicado por 33 resulta en un número cuyos dígitos son todos iguales a 7. ¿Cuál es la suma de los dígitos de N?*

13. Tienes una gran cantidad de bloques de plástico, de longitud 1, anchura 2 y altura 3 cm. ¿Cuál es el menor número de bloques necesario para construir un cubo?



14. Con las cifras 1, 3, 4, 5 y 6, ¿cuántos números de cuatro cifras distintas se podrán formar de modo que acaben en cifra par?

15. En un cuadrado ABCD con lado de 2012 cm., los puntos E y F están situados sobre la recta paralela que une los puntos medios de los lados AD Y BC, como se muestra en la figura. Se unen E y F con los vértices B y D, y el cuadrado queda dividido en tres partes de igual área (el área sombreada y las dos áreas blancas). ¿Cuál es la longitud del segmento EF?



16. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Encuentra un número de seis cifras **abcdef,** de tal manera que el número de tres cifras **abc** sea múltiplo de 4, el número de tres cifras **bcd** sea múltiplo de 5, el número de tres cifras **cde** sea múltiplo de 3 y el número de tres cifras **def** sea múltiplo de 11.

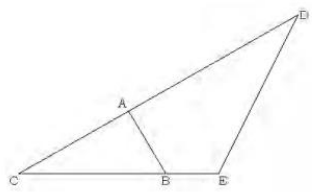
17. A una familia de 6 personas les ha tocado un viaje para dos personas. ¿De cuántas formas se pueden repartir el viaje?

18. Obtener el valor de X en la siguiente expresión

$$\frac{x1996}{9} = x444$$

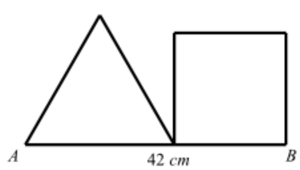
19. Una pareja de enteros positivos a y b se llama sinaloense si 20a+13b= 2013 y a + b es un múltiplo de 13. Encuentra todas las parejas sinaloenses.

20. El área del triángulo ABC es 3. ¿Cuál es el área del triángulo CDE, si CA=4, AD=6, CB=6, BE=2?



21. ¿Cuántos ángulos de 30° están dibujados en un hexágono regular con todas sus diagonales trazadas?

22. Sobre el segmento AB, cuya longitud es de 42 cm, se construye un triángulo equilátero y un cuadrado que tienen el mismo perímetro. ¿Cuánto vale la diferencia entre el lado del triángulo y el lado del cuadrado?



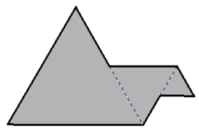
23. . Carlos tiene una colección de 18 palillos. La colección tiene tres palillos de 1 cm, tres de 2 cm, tres de 3 cm, tres de 4 cm, tres de 5 cm y tres de 6 cm. ¿Cuántos triángulos distintos puede formar Carlos utilizando tres palillos de su colección?

24. ¿Cuántos números de tres dígitos existen tales que la suma de esos tres números dígitos sea 24?

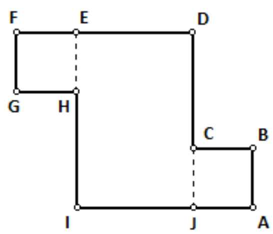
25. Con 0, 1, 2, 3 y 4, ¿cuántos números de cinco cifras se pueden formar, sin repetir ningún dígito?

26. Cuando se escriben los números 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,... ¿cuál es el dígito que ocupa la posición 2002? Nota: en la lista anterior el dígito siete (de 17) ocupa la posición 25.

27. El triángulo equilátero grande tiene 48 cm de perímetro. El perímetro del segundo triángulo es la mitad de primero y el perímetro del tercero es la mitad del segundo. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?



28. En la figura, ABCJ y EFGH son cuadrados iguales. JD = DF y DE = 3 EF. La figura tiene 1818 cm. de perímetro. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo DEIJ? Nota: La figura está fuera de escala.



29. Un número **lobola** es un número formado por diez dígitos diferentes que cumple las siguientes características:
    - **abcdefghij** son sus dígitos.
    - **abc** es divisor de 2013
    - cde y ef son múltiplos de 13

¿Cuántos números diferentes se pueden formar?

30. ¿Cuántas intersecciones formarán diez rectas en el plano sino hay tres de ellas concurrentes?

Notas de TEORÍA DE NÚMEROS

- **Número Primo**

En matemáticas, un **número primo** es un número natural mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores distintos: él mismo y el 1.[1] [2] Los números primos se contraponen así a los compuestos, que son aquellos que tienen por lo menos un divisor natural distinto de sí mismos y de 1. El número 1, por convenio, no se considera ni primo ni compuesto.

Los números primos menores que cien son los siguientes: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59,61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97

Criba de Eratóstenes

Una vez conocida la existencia de infinitos números primos, se plantea un nuevo problema cual es la forma en que dichos números están distribuidos en el conjunto de los números naturales. Este problema es complicado y se conocen sólo resultados parciales. Un primer método para resolver esta cuestión fue establecido en el siglo III a.c. por Eratóstenes1 ; recibe el nombre de Criba de Eratóstenes en honor a su autor y es consecuencia del siguiente teorema cuya primera demostración rigurosa se debe a Fermat.

Teorema

Si un número entero mayor que 1 no tiene divisores primos menores o iguales que su raíz, entonces es primo.

Ejemplo:

Supongamos que queremos saber si el 9 es primo. Entonces, como $\sqrt{9} = 3$, los números primos menores o iguales que 3 son el 2 y el propio 3. 2 no es divisor de 9, pero 3 si lo es, luego 9 no es primo.

Obsérvese que al ser las raíces de 10, 11, 12, 13, 14 y 15 menores que 4, los números primos menores o iguales que ellas son, también, 2 y 3, luego el criterio anterior puede emplearse para ver si estos números son o no primos. En efecto,

El 10 no es primo ya que 2 es divisor de 10.

2 y 3 no son divisores de 11, luego el 11 es primo.

El 12 no es primo ya que es múltiplo de 2.

Teorema Fundamental de la Aritmética

Cualquier número entero n mayor que 1 puede escribirse de manera única, salvo el orden, como un producto de números primos.

Ejemplo Veamos una forma práctica y sencilla de calcular todos los divisores de un número.

Calcularemos los de 720.

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Solución

Según un ejemplo anterior
$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

Entonces los divisores de 720 serán los términos del producto
$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+5) = (1+2+4+8+16)\ (1+3+9)\ (1+5)$

y una forma práctica de calcularlos todos es la siguiente tabla:

	1	2	4	8	16
$\times 3$	3	6	12	24	48
$\times 3^2$	9	18	36	72	144
$\times 5$	5	10	20	40	80
	15	30	60	120	240
	45	90	180	360	720

Donde en la primera fila hemos escrito todas las potencias de 2, desde 2^0 hasta 2^4. En las filas siguientes hemos colocado ordenadamente todos los productos de la fila anterior por cada una de las potencias de 3, desde 3^0 hasta 3^2, y así sucesivamente.

- Número Compuesto

Todo número natural no primo, a excepción del **1**, se denomina **compuesto**, es decir, tiene uno o más divisores distintos a 1 y a sí mismo. También se utiliza el término **divisible** para referirse a estos números.

Los 30 primeros números compuestos son: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44 y 45.

Teorema fundamental de la aritmética

Una característica de los **números compuestos** es que cada uno puede escribirse como producto de dos naturales menores que él. Así, el número 20 es compuesto porque puede expresarse como 4×5; y también el 87 ya que se expresa como 3×29. Sin embargo, no es posible hacer lo mismo con el 17 ó el 23 porque son números primos. Cada número compuesto se puede expresar como multiplicación de dos (o más) números primos específicos, cuyo proceso se conoce como factorización.

El número compuesto más pequeño es el 4 y no hay ninguno que sea mayor que todos los demás; hay infinitos números compuestos.

Número de Divisores de un Número Compuesto

Hemos visto que los números primos solamente tienen 2 divisores. Vamos a estudiar cuántos divisores tiene un número compuesto.

Todo número natural **N** se puede descomponer en factores de forma única, quedando de la forma $N = a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdot d^{\delta}$.. donde a, b, c, d,.. son números primos (1, 2, 3, 5, 7...) y α, β, γ, δ, ... sus exponentes.

Según esto el **número de divisores** que tiene el número **N es: $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1)$...**
Es decir: se suma una unidad a cada uno de los exponentes que tenga el número y se hace el producto de ellos.

En un ejemplo anterior,

$720 = 2^4\cdot 3^2\cdot 5$

Luego el número de divisores de 720 es

$N_{720} = (4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 5 \times 3 \times 2 = 30$

Criterios de divisibilidad

Los siguientes criterios nos permiten averiguar si un número es divisible por otro de una forma sencilla, sin necesidad de realizar la división.

NO.	Criterio	Ejemplo
2	El número termina en una cifra par (0, 2, 4, 6, 8).	378: porque la última cifra (8) es par.
3	La suma de sus cifras es un múltiplo de 3.	480: porque 4+ 8+ 0 = 12 es múltiplo de 3.
4	El número formado por las dos últimas cifras es un múltiplo de 4 o cuando termina en doble cero.	7324: porque 24 es múltiplo de 4. 8200 por que termina en doble 00.
5	La última cifra es 0 ó 5.	485: porque acaba en 5.
6	El número es divisible por 2 y por 3 a la vez.	18: es múltiplo de 2 y de 3 a la vez.
7	Un número es divisible entre 7 cuando, al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 2 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 7.	34349: separamos el 9 (3434'9)y lo doblamos (18), entonces 3434-18=3416. Repetimos el proceso separando el 6 (341'6) y doblándolo (12), entonces 341-12=329, y de nuevo, 32'9, 9*2=18, entonces 32-18=14; por lo tanto, 34349 es divisible entre 7 porque 14 es múltiplo de 7.
8	El número formado por las tres últimas cifras es un múltiplo de 8.	27280: porque 280 es múltiplo de 8.
9	La suma de sus cifras es múltiplo de 9.	3744: porque 3+7+4+4= 18 es múltiplo de 9.
10	La última cifra es 0.	470: termina en cifra 0.
11	Sumando las cifras (del número) en	42702: 4+7+2=13 · 2+0=2 · 13-

	posición impar por un lado y las de posición par por otro. Luego se resta el resultado de ambas sumas obtenidas. si el resultado es cero (0) o un múltiplo de 11, el número es divisible por éste. Si el número tiene sólo dos cifras y estas son iguales será múltiplo de 11.	2=11 → 42702 es múltiplo de 11 66: porque las dos cifras son iguales. Entonces 66 es Múltiplo de 11
12	El número es divisible por 3 y 4.	420: es múltiplo de 3 ya que 4+2+0=6 y de 4 puesto que 20 también lo es. Por tanto múltiplo de 12.
13	Un número es divisible entre 13 cuando, al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 9 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 13	3822: separamos el último dos (382'2) y lo multiplicamos por 9, 2*9=18, entonces 382-18=364. Repetimos el proceso separando el 4 (36'4) y multiplicándolo por 9, 4*9=36, entonces 36-36=0; por lo tanto, 3822 es divisible entre 13
14	Un número es divisible entre 14 cuando es par y divisible entre 7	546: separamos el último seis (54'6) y lo doblamos, 6*2=12, entonces 54-12=42. 42 es múltiplo de 7 y 546 es par; por lo tanto, 546 es divisible entre 14
15	Un número es divisible entre 15 cuando es divisible entre 3 y 5	225: termina en 5 y la suma de sus cifras es múltiplo de 3; por lo tanto, 225 es divisible entre 15
17	Un número es divisible entre 17 cuando, al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 5 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 17	2142: porque 214'2, 2*5=10, entonces 214-10=204, de nuevo, 20'4, 4*5=20, entonces 20-20=0; por lo tanto, 2142 es divisible entre 17.
18	Un número es divisible por 18 si es par y divisible por 9 (Si es par y además la suma de sus cifras es múltiplo de 9)	9702: Es par y la suma de sus cifras: 9+7+0+2=18 que también es divisible entre 9. Y efectivamente, si hacemos la división entre 18, obtendremos que el resto es 0 y el cociente 539.
19	Un número es divisible por 19 si al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 2 y sumar a las cifras restantes el resultado es múltiplo de 19.	Así por ejemplo: 3401, hacemos 340+2= 342, ahora 34+4=38 que es múltiplo de 19, luego 3401 también lo es.

20	Un número es divisible entre 20 si sus dos últimas cifras son ceros o múltiplos de 20	57860: Sus 2 últimas cifras son 60 (Que es divisible entre 20), por lo tanto 57860 es divisible entre 20.
29	Un número es divisible por 29 si al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 3 y sumar a las cifras restantes el resultado es múltiplo de 29.	Así por ejemplo: 2262, hacemos 226+6= 232, ahora 23+6=29 que es múltiplo de 29, luego 2262 también lo es.
31	Un número es divisible por 31 si al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 3 y restar a las cifras restantes el resultado es múltiplo de 31.	Así por ejemplo: 8618, hacemos 861-24=837, ahora 83-21=62 y por último 6-6=0 que es múltiplo de 31, luego 8618 también lo es.

Nota 1: Existen muchas versiones de los criterios de divisibilidad. Así por ejemplo, para el 13 resulta equivalente el criterio: al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 4 y sumarla a las cifras restantes la suma es igual a 0 o es un múltiplo de 13.

Nota 2: Resulta curioso que el criterio de divisibilidad por 7 sirva también como criterio de divisibilidad por 3, aunque evidentemente el criterio tradicional resulta más sencillo y éste no se utiliza: al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 2 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 3.

Nota 3: Aunque existen criterios similares para cualquier número primo, con frecuencia resulta más sencillo dividir que aplicar un criterio complicado (como el del 13). Sin embargo existe un criterio general que funciona siempre y que en muchos casos es suficientemente práctico: restar el número primo (o múltiplos de éste) a las cifras de la izquierda sucesivamente hasta obtener cero o ese número primo. Así el ejemplo del 13 se podría comprobar con el proceso siguiente (usamos el 39 =3*13 para abreviar pasos): 3822 (restamos 13 dos veces a la izquierda) → 2522 → 1222 (restamos 39 tres veces de las tres cifras de la izquierda) → 832 → 442 → 52 y al restar de nuevo 39 obtenemos 52-39 =13

Observación

Todos los criterios señalados funcionan si el número está escrito en el sistema de numeración decimal. En otra base no siempre ocurre así. Pues 102[7], escrito en base 7, termina en cifra par, pero no es divisible por 2. En este caso se suman las cifras 1+2=3; 3=1(Mód2), luego 102 es impar.

Divisor propio

Un **divisor propio** de un número *n* es cualquier divisor que no es el mismo número que el que divide.

Por ejemplo, los divisores propios de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, mientras que el divisor 12 (puesto que 12 divide a 12) es denominado *impropio*.

Cuando se toman en cuenta enteros negativos, un divisor propio es aquel cuyo valor absoluto es menor al número dado. En este caso, los divisores propios serían -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6

Algoritmo de Euclides para encontrar el M.C.D

Al dividir a entre b (números enteros), se obtiene un cociente q y un residuo r. Es posible demostrar que el máximo común divisor de a y b es el mismo que el de b y r(Sea c el máximo común divisor de a y b,.Como a=bq+r y c divide a a y a b divide también a r.Si existiera otro número mayor que c que divide a b y a r, también dividiría a a , por lo que c no sería el mcd de a y b, lo que contradice la hipótesis). Éste es el fundamento principal del algoritmo. También es importante tener en cuenta que el máximo común divisor de cualquier número a y 0 es precisamente a. Para fines prácticos, la notación $\mathrm{mcd}(a, b)$ significa *máximo común divisor de a y b*.

Según lo antes mencionado, para calcular el máximo común divisor de 2366 y 273 se puede proseguir de la siguiente manera:

Paso	Operación	Significado
1	2366 dividido entre 273 es 8 y sobran 182	$\mathrm{mcd}(2366,273) = \mathrm{mcd}(273,182)$
2	273 dividido entre 182 es 1 y sobran 91	$\mathrm{mcd}(273,182) = \mathrm{mcd}(182,91)$
3	182 dividido entre 91 es 2 y sobra 0	$\mathrm{mcd}(182,91) = \mathrm{mcd}(91,0)$

La secuencia de igualdades $\mathrm{mcd}(2366,273) = \mathrm{mcd}(273,182) = \mathrm{mcd}(182,91) = \mathrm{mcd}(91,0)$ implican que $\mathrm{mcd}(2366,273) = \mathrm{mcd}(91,0)$. Dado que $\mathrm{mcd}(91,0) = 91$, entonces se concluye que $\mathrm{mcd}(2366,273) = 91$. Este mismo procedimiento se puede aplicar a cualesquiera dos números naturales. En general, si se desea encontrar el máximo común divisor de dos números naturales a y b, se siguen las siguientes reglas:

1. Si $b = 0$ entonces $\mathrm{mcd}(a, b) = a$ y el algoritmo termina
2. En otro caso, $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b, r)$ donde r es el resto de dividir a entre b. Para calcular $\mathrm{mcd}(b, r)$ se utilizan estas mismas reglas

Asuma que llamamos $a = r_0$ y $b = r_1$. Aplicando estas reglas se obtiene la siguiente secuencia de operaciones:

Paso	Operación	Significado
1	r_0 dividido entre r_1 es q_1 y sobran r_2	$\operatorname{mcd}(r_0, r_1) = \operatorname{mcd}(r_1, r_2)$
2	r_1 dividido entre r_2 es q_2 y sobran r_3	$\operatorname{mcd}(r_1, r_2) = \operatorname{mcd}(r_2, r_3)$
3	r_2 dividido entre r_3 es q_3 y sobran r_4	$\operatorname{mcd}(r_2, r_3) = \operatorname{mcd}(r_3, r_4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	r_{n-1} dividido entre r_n es q_n y sobran r_{n+1}	$\operatorname{mcd}(r_{n-1}, r_n) = \operatorname{mcd}(r_n, r_{n+1})$
$n+1$	r_n dividido entre r_{n+1} es q_{n+1} y sobra 0	$\operatorname{mcd}(r_n, r_{n+1}) = \operatorname{mcd}(r_{n+1}, 0)$

- **Número perfecto**

Un **número perfecto** es un número natural que es igual a la suma de sus divisores propios positivos, sin incluirse él mismo. Dicho de otra forma, un número perfecto es aquel que es amigo de sí mismo.

Así, 6 es un número perfecto porque sus divisores propios son 1, 2 y 3; y 6 = 1 + 2 + 3. Los siguientes números perfectos son 28, 496 y 8128.

- 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14
- 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248
- 8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064

Aparte, y considerando la suma de los divisores propios, existen otros tipos de números.

- **Número defectivo**

Un **número defectivo** o **deficiente** es un número natural que es mayor que la suma de sus divisores propios exceptuándose a sí mismo.

Todos los números primos son defectivos,[1] y también lo son las potencias de los números primos y los divisores propios de los números defectivos y perfectos. Si la suma es mayor, entonces se considera al número como abundante.

Es fácil ver que existen infinitos números defectivos, ya que existen infinitos números primos, y estos son sólo algunos de los números defectivos.

Los números primos son aquellos en los que la suma de los divisores resulta mínima, igual a la unidad. No existen números defectivos que tengan por suma de sus divisores al número 2. Este artículo utiliza la definición clásica, que excluye de la suma al número considerado. Modernamente se ha utilizado otra definición, que incluye al número considerado; en ese caso $\sigma(n) < 2n$ y la suma mínima para los primos es $p + 1 < 2p$. Aquí $\sigma(n)$ es la función divisor, esto es, la suma de todos los divisores positivos de n, incluido el propio n.

- **Número abundante**

En matemáticas, un **número abundante** o **número excesivo** es un número n para el cual $\sigma(n) > 2n$. Aquí $\sigma(n)$ es la función divisor, esto es, la suma de todos los divisores positivos de n, incluido el propio n. El valor $\sigma(n) - 2n$ es conocido como la **abundancia** de n.

Una definición equivalente es que los *divisores propios* del número (todos los divisores excepto el propio número) sumen más que dicho número.

Unos pocos de los primeros números abundantes son:

> 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100, 102, …

A modo de ejemplo, consideremos el número 24. Sus divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 cuya suma es 60. Puesto que 60 es mayor que 2×24=48, el número 24 es abundante. Y su abundancia es $60 - 2 \times 24 = 12$.

El número abundante impar más pequeño es 945. Marc Deléglise mostró en 1998 que la densidad natural de los números abundantes se encuentra entre 0,2474 y 0,2480.

Existen infinitos números abundantes pares e impares. Cualquier múltiplo propio de un número perfecto, y cualquier múltiplo de un número abundante es abundante. También, cualquier entero mayor que 20.161 puede ser escrito como la suma de dos números abundantes.

Números amigos

Dos **números amigos** son dos números enteros positivos ***a*** y ***b*** tales que ***a*** sea la suma de los divisores propios de b, y b sea la suma de los divisores propios de ***a***. (La unidad se considera divisor propio, pero no lo es el mismo número.)

Un ejemplo es el par de naturales (220, 284), ya que:

- los divisores propios de 220 son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, que suman 284;
- los divisores propios de 284 son 1, 2, 4, 71 y 142, que suman 220.

Si un número es amigo de sí mismo (es igual a la suma de sus divisores propios), recibe entonces el nombre de número perfecto.

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

En matemáticas, la **sucesión de Fibonacci** (a veces mal llamada **serie de Fibonacci**) es la siguiente sucesión infinita de números naturales:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 \ldots$$

La sucesión comienza con los números 0 y 1, y a partir de estos, «cada término es la suma de los dos anteriores», es la relación de recurrencia que la define. Cada número a partir del tercero, se obtiene sumando los dos que le preceden. Por ejemplo, 21 = 13 + 8; el siguiente a 34 será 34 + 21 = 55La

A los elementos de esta sucesión se les llama **números de Fibonacci**. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci

Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos. También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en la flora de la alcachofa

Esta sucesión es la llamada "sucesión de Fibonacci".

La sucesión de Fibonacci presenta diversas regularidades numéricas. Para que resulte más sencillo las hemos enunciado en casos particulares (aunque se cumplen en general) y hemos calculado los primeros catorce términos de esta sucesión:

t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9	t10	t11	t12	t13	t14
1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**	**233**	**377**

- Si sumas los cuatro primeros términos y añades 1, te sale el sexto (1+1+2+3 + 1 = 8). Si sumas los cinco primeros términos y añades 1, te sale el séptimo (1+1+2+3+5 + 1 = 13).
- Si sumas los tres primeros términos que ocupan posición impar (t1,t3,t5) sale el sexto término (t6), (1+2+5 = 8). Si sumas los cuatro primeros términos que ocupan posición impar (t1,t3,t5,t7) sale el octavo término (t8), (1+2+5+13 = 21).
- Si sumas los tres primeros términos que ocupan posición par (t2,t4,t6) y añades 1, sale el séptimo término (t7), (1+3+8 + 1 =13). Si sumas los cuatro primeros términos que ocupan posición par (t2, t4, t6,t8) y añades 1, sale el noveno término (t9), (1+3+8+21 + 1 =34).
- Tomemos dos términos consecutivos, por ejemplo: t4=3 y t5=5; elevando al cuadrado y sumando: 32+52=9+25=34 que es el noveno (4+5) término de la sucesión. Tomando t6=8 y t7=13; elevando al cuadrado y sumando: 82+132=64+169=233 que es el (6+7) decimotercero término de la sucesión.
- Pero si elevamos al cuadrado los cinco primeros términos y los sumamos, sale el producto del quinto y el sexto término: 12+12+22+32+52=40=5*8. Si hacemos lo mismo para los seis primeros términos, sale el producto del sexto y el séptimo término: 12+12+22+32+52+82=104=8*13.
- Y quizás la más sorprendente sea la siguiente propiedad. Dividamos dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor y veamos lo que obtenemos:

  1 : 1 = 1
  2 : 1 = 2
  3 : 2 = 1´5
  5 : 3 = 1´66666666
  8 : 5 = 1´6
  13 : 8 = 1´625
  21 :13 = 1´6153846....
  34 :21 = 1´6190476....
  55 :34 = 1´6176471....
  89 :55 = 1´6181818....

  Al tomar más términos de la sucesión y hacer su cociente nos acercamos al número de oro. Cuanto mayores son los términos, los cocientes se acercan más a □=1,61803....

Números Capicúa

Un capicúa es un número especial: se lee igual al derecho que al revés.

Su origen es Catalán: “cap” = cabeza y “cua” = cola.

Si se toma un número cualquiera, por supuesto con más de un dígito, y se lo vuelve del revés, al sumarlo existe la posibilidad que de un Número Capicúa.

12 + 21 = 33

102 + 201 = 303

Si no resulta así, como en el siguiente caso, se trata del número 48:

48 + 84 = 132

no hay más que repetir el proceso para obtenerlo:

132 + 321 = 353

Si se prueba con el 187, es seguro que tras 23 sumas llegamos a un número capicúa, en efecto este número es:

8.813.200.023.188

Otro proceso para obtener números capicúas parte de los números triangulares:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...

Combinatoria

En la mayoría de los problemas de análisis combinatorio se observa que una operación o actividad aparece en forma repetitiva y es necesario conocer las formas o maneras que se puede realizar dicha operación.

Determinar el número de elementos que verifican una propiedad sin construirlos todos. Contar sin enumerar

Para dichos casos es útil conocer determinadas técnicas o estrategias de conteo que facilitarán el cálculo señalado. Ejemplos:

- Señalar las maneras diferentes de vestir de una persona, utilizando un número determinado de prendas de vestir
- Ordenar 5 artículos en 7 casilleros.
- Contestar 7 preguntas de un examen de 10.
- Designar 5 personas de un total 50 para integrar una comisión.
- Sentarse en una fila de 5 asientos 4 personas.
- Escribir una palabra de 7 letras utilizando 4 consonantes y 3 vocales.

Principios básicos de recuento

- Principio de adición
- Principio de multiplicación
- Principio de inclusión-exclusión
- Principio del complementario

Selecciones básicas sobre conjuntos

- Variaciones
- Permutaciones
- Combinaciones

Técnicas:

Expresar el problema en función de otros más sencillos
Principios básicos de recuento
Identificarlo con modelos conocidos
Selecciones sobre conjuntos
Modelizar mediante una función recursiva
Funciones recursivas de argumento natural
Combinar diversas técnicas.
Herramienta útil: construir algunos ejemplos, representar el patrón general

- **Principio de adición**

Si un proceso de selección se puede realizar de dos formas excluyentes de modo que la primera de ellas admite **n** opciones y la segunda admite **m** opciones, entonces el número total de selecciones posibles es n+m.

Ejemplo
Un repuesto de automóvil se venden en 6 tiendas en la Victoria o en 8 tiendas del Madero. ¿De cuántas formas se puede adquirir el repuesto?

Solución:
Por el principio de adición:
Victoria o Madero
6 formas + 8 formas = 14 formas

- **Principio de multiplicación:**

Si un proceso de selección se puede dividir en dos pasos consecutivos de modo que hay **n** elecciones en el primero y por cada una de ellas hay **m** elecciones en el segundo, entonces el número total de elecciones es n*m.

Ejemplo:

En la etapa final de fútbol profesional de primera, cuatro equipos : CRISTAL (C), BOYS (B) ,ESTUDIANTES (E), UNIVERSITARIO (U), disputan el primer y segundo lugar (campeón y subcampeón). ¿De cuántas maneras diferentes estos equipos pueden ubicarse en dichos lugares?

Solución:

Utilizando el principio de multiplicación

EXPLICACIÓN:

4	3

4 x 3 = 12

1º El primer lugar puede ser ocupado por cualquiera de los cuatro equipos.

2º El segundo lugar puede ser ocupado por cualquiera de los otros tres equipos que restan

3º Por el principio de multiplicación, se observa que el evento del primer lugar se presenta de 4 maneras y el del segundo lugar de 3 maneras distintas, entonces el número de maneras totales será: 4 x 3 = 12

- **Principio de inclusión-exclusión:**

• Si un proceso de selección se puede realizar de dos formas de modo que la primera admite n opciones, la segunda admite m opciones y hay r opciones comunes a ambas, entonces el número total de selecciones posibles es n+m-r.

- **El Principio del palomar, de los casilleros o de Dirichet**

Si disponemos de n cajas para colocar n+k bolas hemos de colocar más de una bola en alguna caja.

Si se tiene un conjunto n de objetos, repartidos en m casilleros y n>km, con K un número natural, entonces hay al menos un casillero donde hay (k+1) o más objetos.

Ejemplo:

Entre trece personas hay al menos dos que nacieron el mismo mes.

- **Principio del complementario**

El número de elementos de un conjunto finito que verifican una propiedad es el número de elementos de dicho conjunto menos el número de elementos que no la verifican

Ejemplo: Determinar el número de resultados que se pueden obtener al tirar un dado rojo y uno verde cuya suma es menor que 11.

- **Número Factorial**

El **factorial** para todo entero positivo *n*, el **factorial de *n*** o ***n* factorial** se define como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 (es decir, los números naturales) hasta *n*. Por ejemplo,

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

La operación de factorial aparece en muchas áreas de las matemáticas, particularmente en combinatoria y análisis matemático. De manera fundamental, el factorial de *n* representa el número de formas distintas de ordenar *n* objetos distintos (elementos sin repetición). Este hecho ha sido conocido desde hace varios siglos, en el s. XII por los estudiosos hindúes. La notación actual *n*! fue usada por primera vez por Christian Kramp en 1803.

La definición de la función factorial también se puede extender a números no naturales manteniendo sus propiedades fundamentales, pero se requieren matemáticas avanzadas, particularmente del análisis matemático.

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5.040

- **Permutación**

Se denomina permutación de n elementos a una selección ordenada de los **n** elementos disponibles. Se representa P(n) y se verifica que el número de permutaciones de **n** elementos es:

$$P(n) = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

La fórmula se obtiene usando el principio de multiplicación.
Es un caso particular de las variaciones
EJEMPLO

Determinar el número de formas distintas en que 5 personas pueden alinearse en la taquilla de un cine

A) Permutación con repetición

Se denomina permutación con repetición de n elementos entre los que hay k grupos de elementos indistinguibles de tamaños **n1, …,nk**, a una selección ordenada de los **n** elementos. Se representa **P(n, n1, …, nk)** y se verifica que el número de permutaciones con repetición es:

$$P(n, n_1, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$$

Clave: para cada grupo de elementos indistinguibles solo importan los lugares que ocupan en una alineación de los **n** elementos

Combinación de r elementos

Se denomina combinación de r elementos de un total de **n** a una selección, sin orden, de r elementos distintos de los **n** posibles. Se representa C(n,r) y se verifica que el número de combinaciones de n elementos tomados de r en r es

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

EJEMPLO: Determinar los colores que se pueden obtener al mezclar 3 colores distintos de una paleta de 8 colores

A) Combinación con repetición de r elementos

Se denomina combinación con repetición de **r** elementos de un total de **n** a una selección, sin orden, de **r** elementos posiblemente repetidos de los **n** posibles.

Se representa CR(n,r) y se verifica que el número de combinaciones con repetición de **n** elementos tomados **de r en r** es:

$$CR(n,r)=PR(r+n-1,r,n-1)=\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

EJEMPLO: Determinar el número de pedidos diferentes que puede recibir un camarero que atiende a una mesa de 5 personas si las bebidas disponibles son café, té o menta.

La diferencia básica entre permutación y combinación es que para la permutación el orden si importa es decir, que cuenta todos los órdenes distintos de una misma lista; para la combinación, por otro lado, el orden no importa, es decir únicamente importa la lista y no sus órdenes distintos.

- **Número Catalán**

En combinatoria, los **números de Catalán** forman una secuencia de números naturales que aparece en varios problemas de conteo que habitualmente son recursivos. Obtienen su nombre del matemático belga Eugène Charles Catalán (1814–1894).

El *n*-ésimo número de catalán se obtiene, aplicando coeficientes binomiales, a partir de la siguiente fórmula:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \qquad \text{con } n \geq 0.$$

n	C_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1.430
9	4.862
10	16.796

- **Número Bell**

Es el número de particiones (formas de re arreglar) en que puedes dividir un conjunto en subconjuntos no vacíos, teniendo todos los elementos del conjunto original.
Si en un conjunto tienes solo 3 elementos A B C
puedes
Tendrás las siguientes particiones es :
1.- (A) (B) (C)
2.- (A B) (C)
3.- (A C) (B)
4.- (B C) (A)
5.- (A B C)

Cada paréntesis indica un subconjunto.
Por lo que el número de Bell para 3 elementos es 5

En combinatoria, el *n*-ésimo **número de Bell**, llamado así por Eric Temple Bell, es el número de particiones de un conjunto de *n* elementos, o equivalentemente, el número de relaciones de equivalencia en el mismo. Comenzando con $B_0 = B_1 = 1$, los primeros números de Bell son:

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, …

Bibliografía

Algunos de los problemas incluidos en este Cuadernillo formaron parte de los exámenes aplicados en la OEMEPS, de los distintos estados mismos que fueron tomados principalmente de Calendarios Matemáticos y de exámenes y problemarios de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (ANPM) o de otras Olimpiadas de Matemáticas.