XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

# ¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la Educación Matemática?

Luis **Moreno**-Armella
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
lmorenoarmella@gmail.com

**Resumen**

Ofreceré un punto de vista sobre el impacto de las tecnologías digitales en la educación matemática, partiendo en mi experiencia dentro de los programas de post-grado (maestría y doctorado) en Cinvestav-IPN, México y en proyectos de desarrollo que han tenido lugar tanto en Colombia como en México. Nuestro trabajo se inició con el objetivo de integrar la calculadora graficadora al trabajo de aula de profesores en servicio. El plan de estudios diseñado para una enseñanza “estática” no era compatible con la presencia de las calculadoras graficadoras que además *hablaban* álgebra y *sabían* trazar perpendiculares. Parte importante del plan de estudios “estático” empezaba a ser obsoleto, exigiendo de parte de los profesores un rediseño de actividades. Entonces, fue necesario entrar de lleno a trabajar con la formación de los profesores. Decidimos empezar por el conocimiento técnico del *mediador* digital y pasar luego a la integración del conocimiento matemático.

*Palabras clave*: mediadores digitales, fluidez digital, objetos borde, símbolo ejecutable, variación y cambio.

## 1. Antecedentes

Ofreceré un punto de vista sobre el impacto de las tecnologías digitales en la educación matemática, partiendo en mi experiencia dentro de los programas de post-grado (maestría y doctorado) en Cinvestav-IPN, México y en proyectos de desarrollo que han tenido lugar tanto en Colombia como en México. Nuestro trabajo se inició con el objetivo de integrar la calculadora TI92 (Voyage) al trabajo de aula de profesores en servicio. Un choque surgió de inmediato, pues el plan de estudios diseñado para una enseñanza “estática” no era compatible con la presencia de las calculadoras graficadoras que además *hablaban* álgebra y *sabían* trazar perpendiculares. Ocurrió algo que ya ha sido reportado por muchos colegas de diversos países, a saber, que parte importante del plan de estudios empezaba a ser obsoleto, exigiendo de parte de los profesores un rediseño de actividades. Esto tuvo un éxito muy parcial. Fue necesario entrar de lleno a trabajar con la formación de los profesores. Decidimos empezar por el conocimiento técnico del *mediador* digital (así lo llamamos) y pasar luego a la integración del conocimiento matemático. Ese conocimiento ya estaba de una u otra forma presente, de modo que se trataba de generar la integración de la fluidez digital y de la fluidez conceptual. En este momento empezaron a ser claros problemas que requerían investigación detenida. Fue así como iniciamos una exploración sobre las representaciones dinámicas-digitales de los *objetos* matemáticos. Un rasgo central de dichas representaciones es su naturaleza ejecutable que permite trasladar parte de los algoritmos al universo interno del mediador digital. Hace presencia un tipo de objeto que hemos denominado *objetos borde* y que son susceptibles del doble tratamiento tanto digital como escrito. Lo importante es que haya un sentido trasladable y una apertura a nuevos dominios de significación para el estudiante. Esto transforma o debería transformar, su disposición frente al conocimiento matemático. Nos orientaremos a ofrecer ejemplos de carácter geométrico pero en el terreno de problemas de variación y acumulación. Curricularmente, observamos una *erosión* de los planes de estudio como resultado de la tensión generada por la presencia incómoda de la tecnología digital. Observamos también un aumento de la capacidad expresiva de los estudiantes y una mayor integración comunicativa dentro del salón de clases. Pero hay problemas enormes que empiezan a demandar nuestra atención. Tienen que ver con una nueva epistemología del conocimiento matemático en las escuelas.

Al entrar a la segunda década del nuevo siglo parece haber unanimidad internacional sobre la importancia de la educación. Los países toman acciones para crear bases de sustentación estables con este propósito. Es tangible que los sistemas educativos tendrán que incorporar los inmensos desarrollos científicos y tecnológicos alcanzados en las últimas décadas, la pregunta es: ¿cómo hacerlo? La investigación ha mostrado que el conocimiento científico sufre transformaciones ostensibles antes de entrar al salón de clases. Esta transposición del conocimiento crea una tensión entre las expectativas educativas y sociales, por un lado, y lo que el sistema educativo puede *entregar* en realidad. Es claro que la educación tiene una dimensión política; y hay solución de continuidad con las tensiones mencionadas cuando la sociedad puede entender que la educación es un proceso que atiende no solamente necesidades sociales sino que es además, un instrumento para enfrentar lo desconocido e inesperado.

Corremos el riesgo de que las perspectivas educativas angosten sus metas y simplemente sean vista la educación como otro rubro de baja inversión. Esto ha ocurrido con frecuencia y en consecuencia, hay que atender la necesidad de reformular lo que se enseña, cómo y por qué. Para ello, buscamos respuestas a estas preguntas: ¿Cuál es el papel de la educación matemática y de las tecnologías digitales? O mejor, ¿ cuál es el *nuevo* papel de la educación en las sociedades contemporáneas? En particular, en las sociedades emergentes desde la óptica tradicional del desarrollo. El acceso al conocimiento no puede ser visto como *neutro* ya que hay un problema tangible de exclusión para quienes se queden al margen del proceso educativo a cualquier nivel.

## 2. Propuesta

La presencia tan intensa de las tecnologías digitales nos recuerda que tales tecnologías "mecerán nuestro mundo" y ello es inevitable. Ha sido explicado ya que los sistemas educativos constituyen un sistema abierto, un sistema complejo con una diversidad de dinámicas locales que interactúan permanentemente y cambian la estructura global del sistema. Allí se cristalizan las nuevas visiones educativas.

La *matemática de la variación y el cambio* a través de sus incrustaciones digitales podrán tornarse en una dinámica que transforme los currícula del futuro incluyendo las nuevas aplicaciones de dichas herramientas. Nada de esto va a acontecer sin la permanente gravitación de los entornos socioculturales.

La matemática escolar tendrá cada vez mayor importancia. Pero la educación matemática sigue quedando a deber. Los resultados internacionales lo muestran a pesar de las críticas que reciben. El salón de clases es el sistema nervioso central de muchos proyectos educativos. Allí, es posible cultivar *ideas poderosas* que despierten un genuino pensamiento matemático. Voy a sugerir algunas estrategias que pudieran servir para incorporar los resultados de la investigación al diseño curricular, teniendo las tecnologías digitales como instrumento de mediación.

La presencia de los instrumentos digitales produce, hoy en día, conflictos de validación cuando se introducen en la enseñanza de las matemáticas. Estos conflictos pueden ilustrase así: la presencia de estas tecnologías *erosiona* la alineas curriculares tradicionales, pues allí hay un conocimiento y unos tratamientos que han alcanzado cierta estabilidad ante la cual irrumpen las tecnologías digitales. La nueva dimensión epistémica de los proyectos educativos es una realidad que no puede soslayarse. Por el momento, perderemos de vista la dimensión sociocultural explícitamente (como estrategia narrativa), para concentrarnos en los aspectos epistémicos y cognitivos del problema. Hay dos principios orientadores:

**Principio Cognitivo**: la cognición humana depende de la mediación de artefactos materiales y simbólicos para ganar conocimiento.

**Principio Epistemológico**: las herramientas y artefactos que median la cognición humana no son epistemológicamente neutros.

No hay conocimiento puro. El conocimiento que produce la actividad humana está inextricablemente ligado a los artefactos que median cada acción. Debemos ir de estos principios a la consideración del desarrollo conceptual y tecnológico como adquisiciones que *fluyen* en el salón de clases.

La tensión entre la manera *estática* de pensar las matemáticas, tal y como ha sido nutrida por la enseñanza hasta hoy en día y las nuevas formas propiciadas por los medios digitales no puede conducir a una ruptura. Tiene que hallarse una vía intermedia que permita su fusión. Para ello, introducimos la idea de *objeto borde.* Ellos son encarnaciones dinámico-digitales de objetos matemáticos que se definen inicialmente dentro de un medio estático de papel y lápiz y que pueden ser explorados de modos significativos en sus refracciones digitales. Este tipo de encarnación va mucho más allá de un cambio de sistema de representación dentro del medio estático. Como hemos dicho anteriormente, una representación digital posee una cualidad ausente en el medio estático, a saber, *la ejecutabilidad*, de la representación. Esta es responsable de la clase de interacciones que el estudiante puede tener cuando las matemáticas quedan "incrustadas" en el medio digital. Por ejemplo, cuando el estudiante encuentra un objeto familiar un triángulo digamos, y arrastra un vértice el medio re-acciona produciendo un nuevo triángulo ––revelando la *plasticidad* del objeto que no pierde su identidad de triángulo. Al observar este resultado, el estudiante no permanece en un estado cognitivo pasivo, sino que es estimulado a desencadenar una nueva acción generando así un proceso iterativo. En el medio digital la acción no le pertenece exclusivamente al actor/estudiante, sino que es compartida entre el actor y el medio. La exploración matemática en un medio digital está mediada por sistemas de representación activos y el conocimiento que emerge es distinto al que emerge de un medio estático. *Los objetos borde son como sondas dirigidas a un nuevo territorio matemático todavía mayormente inexplorado*.

Ofreceremos ahora algunos modelos de actividades matemáticas en medios digitales para sustanciar las ideas que hemos venido desarrollando. Se trata de situaciones ejemplares exploradas dentro de un proyecto de formación de profesores.

*Ejemplar 1*. Dado un triángulo ABC, ¿cómo podemos construir un triángulo DEF cuyo perímetro sea mínimo?

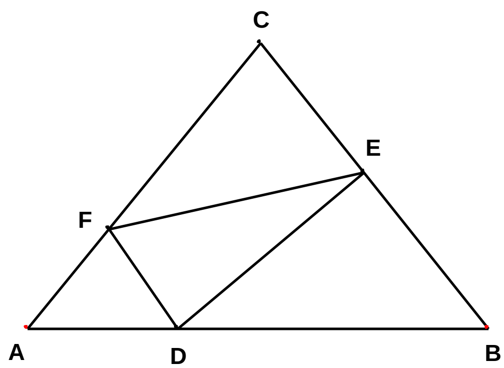


Figura 1: perímetro mínimo

Hay algunas acciones matemáticas que forman parte del entorno como es la transformación de reflexión. Reflejemos los lados DF y DE sobre los lados correspondientes AC y BC del triángulo original. Obtenemos la figura 2.

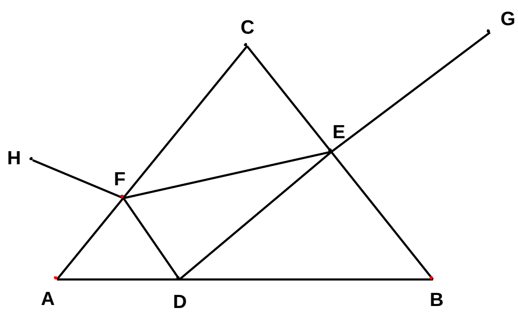


Figura 2: reflexiones

La linea quebrada HFEG ofrece una cuantificación del perímetro del triángulo inscrito DEF porque las reflexiones son isometrías. Una discusión a lo largo de estas lineas, sobre el significado de la linea quebrada, ha inducido a esclarecer que el triángulo solución (triángulo órtico) es aquel que produzca una linea quebrada...que sea un segmento de recta.

La figura 3 muestra que esto puede ocurrir. De hecho ocurre cuando D, E, y F son los pies de las alturas tomadas desde los lados AB, BC, and AC del triángulo original.

Si arrastramos los vértices A, B, C la respuesta del medio digital enseña que la construcción es infraestructural. Ofrecemos a continuación otra situación ejemplar, que hemos empleado a menudo y que exhibe características de la exploración que le pertenecen al entorno ejecutable.

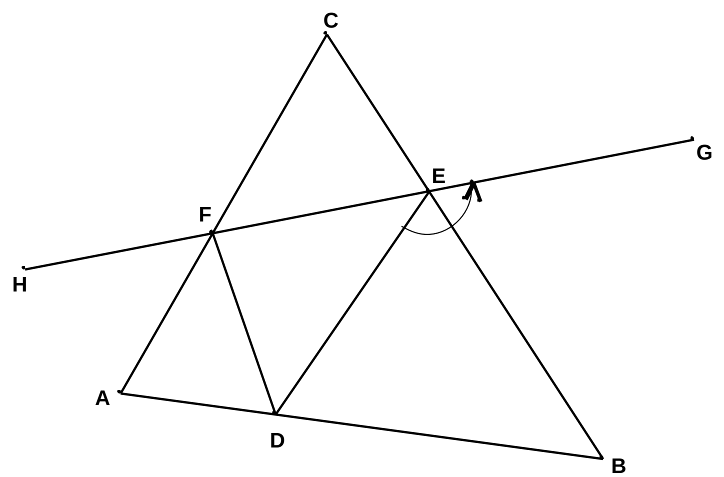


Figura 3: la solución

*Ejemplar 2*. Dado un rectángulo y sus dos diagonales como se muestra en la figura siguiente. Se elige un punto P arbitrario. Se trata de demostrar que la suma de distancias de P a las dos diagonales es una constante.

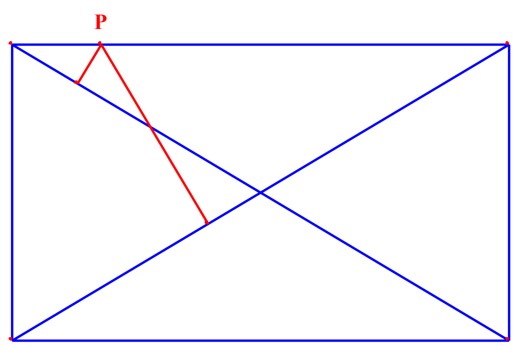


Figura 4

La versión estática del problema requiere un uso ingenioso de triángulos congruentes. Pero eso sería lo de menos. Lo de más es tratar de ver cuál es esa constante. El punto P puede arrastrarse sobre el rectángulo trazado en el medio dinámico (soporte de la ejecutabilidad de las representaciones) y al desplazarlo hasta un vértice se obtiene:

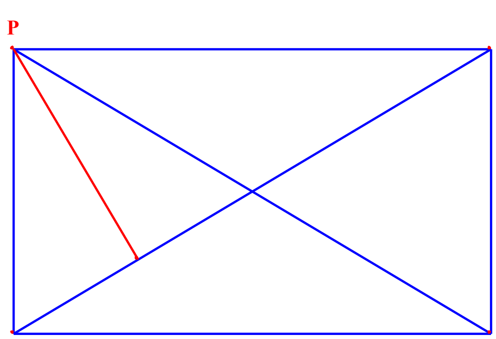


Figura 5

A partir del mundo de evidencias que abre esta co-acción, el problema toma otra ruta, muy distinta a la ruta estática.

El efecto neto de estas exploraciones se traduce en un impacto pedagógico que conduce a una consideración muy seria sobre la naturaleza de las actividades, la producción de preguntas que guíen y estimulen el descubrimiento. Estas situaciones ejemplares construídas a partir de objetos borde, están en la zona de desarrollo potencial de la geometría estática. La infraestructura representacional ofrece un andamiaje seguro que se apoya a su vez, en la estructura matemática preservada eficientemente cuando se ejecuta la representación.

*Ejemplar 3.* Se considera un triángulo ABC y un punto P sobre el lado AB.

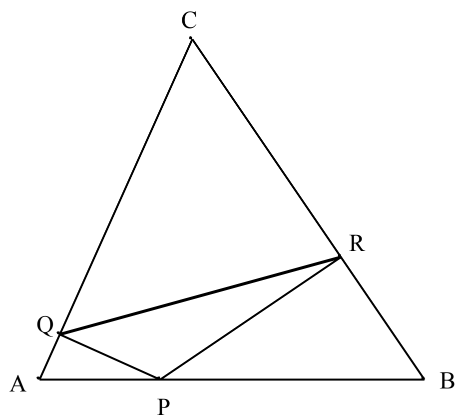


Figura 6

Desde P se trazan perpendiculares PQ y PR como se muestra en el dibujo. El problema consiste en determinar la posición de P de manera tal que el segmento QR tenga longitud mínima.

Los estudiantes-profesores a los cuales se les propuso el problema estuvieron en condiciones de desplazar (*dragging*) en punto P sobre el segmento AB para comprobar de este modo que la longitud de QR varía. Es una situación genérica de variación y optimización. Pero ahora, a diferencia de los ejemplares anteriores, introducimos una perspectiva novedosa que consiste en *medir* perceptivamente la variación mediante un sistema de coordenadas móvil que anclamos al punto P. Esto recuerda las ideas de Oresme sobre las *intensidades* de la variación. La figura siguiente insinúa el tipo de exploración a que da lugar esta nueva perspectiva:

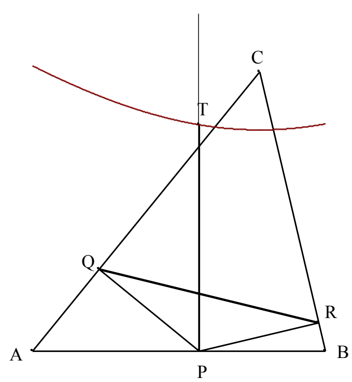


Figura 7

Se observa la trayectoria del punto T (PT tiene una longitud igual a la del segmento QR para esa posición de P). La discusión colectiva que se genera desemboca en que posición de P que resuelve el problema se obtiene cuando la linea PT coincide con la altura PC del triángulo. La *plasticidad* del medio digital hace posible variar el triángulo original y obtener instantáneamente la trayectoria de T correspondiente al nuevo triángulo. Qué ocurre si el triángulo ABC es rectángulo? Etc son preguntas que el colectivo de profesores-estudiantes se pueden plantear (y que se han planteado).

Nótese que no hemos empledo explícitamente fórmulas algebraicas para abordar el tratamiento de estos ejemplares. Desde el punto de vista del diseño eso permite poner de relieve los problemas de variación y cambio y las *formas intermedias de validación*. La polisemia de las gráficas digitales ofrecen, más allá de su potencial complejidad, la oportunidad de entrar a un nuevo abordaje de la generalidad y la abstracción mediante el recurso de concebir dicho medio como un proveedor de *dominios de abstracción*. Nuevos medios implican nueva expresividad. Hacer matemáticas habrá de entenderse entonces como una manera de estar y ser en el mundo.

## 4. Reflexiones finales

Los seres humanos hemos estado saturando el entorno a través de *actividades mediadas* por artefactos. Pero los humanos no somos ni fuimos inmunes, cognitivamente hablando a este proceso: hemos estado sujetos a profundos procesos de *enculturación* a lo largo del tiempo.

El conocimiento depende, en todos los casos, de la mediación de los sistemas semióticos de representación. Los ejemplos más tempranos de huesos con incisiones ilustran este aserto. En el caso de las matemáticas, nos permite llegar a la conclusión de que no existen representaciones intrínsecas de los mismos, no hay pues objetos matemáticos al margen de una actividad semiótica. Aquí es importante distinguir entre el problema epistemológico y el didáctico. En el primer caso, el objeto matemático "aparece" cuando producimos una representación que nos permite hablar de una experiencia en trance de ser matematizada. Por ejemplo, cundo los astrónomos antiguos produjeron tablas con los datos relativos a las posiciones de un planeta estuvieron en posibilidad de discutir la matemática numérica de las órbitas. Más adelante, cuando aparece una segunda forma de representación (la órbita geométrica, por ejemplo) la primera representación se asimila a la segunda, se *refracta* en la segunda, dando lugar a un nuevo objeto. De este modo evoluciona el objeto sometido a un proceso iterativo de representaciones. *El objeto siempre está en construcción* y su futuro depende de las actividades que vayamos realizando en su zona de desarrollo potencial. Otro ejemplo notable lo constituye la geometría analítica. El plano cartesiano sintetiza de una manera que es más rica que las componentes sumadas, las perspectivas algebraica y geométrica. Las realizaciones son resultado de un proceso de cristalización transitorio pero estable.

Ahora bien, desde la perspectiva didáctica, quien aprende está sometido a la presión de un objeto frente a él y su problema consiste en integrar las distintas perspectivas que ofrecen los sistemas de representación en juego. El sentimiento de que algo está allí, debajo de las representaciones, conduce a una *ilusión de realismo* como si las representaciones tan solo describieran una realidad que las pre-existe, como si sólo fueran retratos. Tal vez eso ayude a explicar el platonismo matemático. Esa es la ilusión que sintió Hertz ante las ecuaciones de Maxwell. Identificamos la objetividad con los productos cristalizados de una actividad semiótica intencional, compartida socialmente. La objetividad proviene de la actividad semiótica. La objetividad no es intrínseca a un objeto que no podría existir antes de dicha actividad, antes de una representación.

Concluyamos ubicando mediante una pregunta nuestro interés hacia el futuro:

*¿Qué ocurre cuando introducimos sistemas digitales de representación?*

Como ya hemos mostrado con las situaciones ejemplares, ocurre una refracción del objeto matemático en el medio digital con las características que le otorga la *ejecutabilidad* del sistema de representación. La ejecutabilidad es el motor de la co-acción entre el aprendiz y el medio que responde a sus acciones respetando el universo interno, grabado en el procesador. La co-acción es más que la iteración de las interacciones entre el usuario y el entorno; la co-acción es un genuino proceso dialéctico puesto en marcha gracias a la ejecutabilidad y que abre una zona nueva de realización del objeto matemático actual, transformándolo en otro.

Estas consideraciones tienen implicaciones epistemológicas y en consecuencia, tienen implicaciones educativas pues *la matemática educativa es una epistemología aplicada*. Al refractar el objeto matemático en el medio digital, aparecen posibilidades nuevas para la justificación y la prueba. De ninguna forma insinuamos una sustitución abrupta de la epistemología tradicional, sino, mas bien, subrayamos que estamos entrando a una nueva fase de exploración en la cual los objetos borde están colocados en una zona de desarrollo que el efecto cultural proyectará realizaciones tal vez inesperadas.

Tenemos la profunda convicción de que la educación matemática no podrá eludir estas circunstancias.