



Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Juan D. **Godino**

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada

jgodino@ugr.es

Resumen

La Didáctica de las Matemáticas debe aportar conocimientos descriptivos y explicativos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos que ayuden a comprender dichos procesos. Pero también debe orientar, de manera fundamentada, la acción efectiva sobre la práctica y promover su mejora progresiva, para lo cual se necesitan teorías de índole instruccional. En este trabajo mostraremos que la noción de idoneidad didáctica introducida en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, y el sistema de indicadores empíricos que la desarrollan, puede ser el punto de partida de una teoría de la instrucción matemática orientada hacia la mejora progresiva de la enseñanza.

Palabras claves: enseñanza y aprendizaje, diseño educativo, idoneidad didáctica, educación matemática.

Abstract

Indicators of didactical suitability for mathematics teaching and learning processes

Mathematics education should provide descriptive and explanatory knowledge for teaching and learning of specific contents that help understanding these processes. But it also should guide, in a reasoned way, the effective action on practice to promote its progressive improvement. To reach this goal we need to develop instructional theories. In this work, we will show that the notion of didactical suitability and the system of empirical indicators that develop this idea, introduced in the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction, can be the starting point for a theory of mathematics instruction oriented towards the progressive improvement of teaching.

Key words: teaching and learning, educational design, didactical suitability, mathematics education

1. Introducción

La Didáctica de las Matemáticas como campo de investigación ha adquirido una cierta consolidación a nivel internacional, como muestran diversos indicadores (revistas, congresos, colectivos académicos, etc.). Sin embargo, existe un cierto divorcio entre los resultados de las investigaciones académicas y la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Una de las razones de esta separación es el énfasis de las investigaciones en planteamientos descriptivos de aspectos parciales (psicológicos, sociológicos, epistemológicos, políticos, etc.) de los problemas educativos, dejando de lado el componente tecnológico de la educación matemática.

Este énfasis en la descripción y explicación de lo que pasa en la clase, de las decisiones que toma el profesor cuando enseña, de los procesos mentales de los sujetos cuando resuelven problemas, se puede ver en los trabajos de Schoenfeld sobre los modelos del proceso de enseñanza y los antecedentes que le sirven de base (Schoenfeld, 1998; 2000). Hay múltiples investigaciones que describen los diversos factores que condicionan las decisiones del profesor (conocimientos, creencias, valores, ...) en los momentos de diseño, implementación y evaluación, aunque pocas de ellas abordan la articulación conjunta de estos factores. Se tratan de estudios cognitivos sobre el pensamiento humano en la resolución de problemas. En concreto, Schoenfeld (1998) centra su atención en esta cuestión: “Algo ha sucedido. ¿Qué hará el profesor a continuación y (lo que es más importante) porqué?” (p. 3)

La acción efectiva sobre los problemas reales de la clase requiere desarrollar teorías instruccionales específicas que ayuden al profesor en la toma de decisiones en las fases de diseño, implementación y evaluación. Se precisa elaborar teorías educativas que articulen las facetas epistémica y ecológica (teorías curriculares), junto con teorías del aprendizaje (facetas cognitiva y afectiva) y teorías orientadas al diseño instruccional, esto es, a la práctica de la enseñanza.

El enfoque de la Didáctica de las Matemáticas como una “ciencia de diseño” es resaltado por diversos autores (Wittman, 1995; Hjalmarson y Lesh, 2008; Lesh y Sriramn, 2010). Por ejemplo, Lesh y Sriramn (2010, p. 124) reflexionan sobre la naturaleza del campo de investigación de la educación matemática, planteándose estas cuestiones: ¿Deberían los educadores matemáticos pensar sobre sí mismos como siendo psicólogos educativos aplicados, psicólogos cognitivos aplicados, o científicos sociales aplicados? ¿Se deberían considerar como los científicos en el campo de la física, o de otras ciencias puras? ¿O más bien se deberían considerar como ingenieros u otros científicos orientados al diseño, cuya investigación se apoya sobre múltiples perspectivas prácticas y disciplinares – y cuyo trabajo está guiado por la necesidad de resolver problemas reales como también por la necesidad de elaborar teorías relevantes? La posición defendida por estos autores es considerar la educación matemática como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. “Nuestra visión del diseño en la investigación educativa se basa, en parte, en las semejanzas y paralelismos entre la educación y la ingeniería como campos que simultáneamente buscan avanzar el conocimiento, resolver problemas humanos, y desarrollar productos para su uso en la práctica” (Hjalmarson y Lesh, 2008, p. 526).

En el campo de la Didáctica General y para áreas específicas se han desarrollado una variedad de modelos y teorías de diseño educativo. “Una teoría de diseño educativo es una teoría que ofrece una guía explícita sobre la mejor forma de ayudar a que la gente aprenda y se desarrolle. Los tipos de conocimientos y de desarrollo pueden ser cognitivos, emocionales,

físicos y espirituales” (Reigeluth, 2000, p. 15). Están dirigidas a la práctica y describen métodos educativos y las situaciones en las que dichos métodos deberían utilizarse.

Una revisión de los diversos manuales de investigación sobre educación matemática revela la ausencia de consenso sobre teorías de diseño instruccional aplicadas a la enseñanza de las matemáticas. “Lo que constituye una buena enseñanza es usualmente controvertido y permanecerá controvertido” (Frankle, Kazemi y Battey, 2007, p. 226). Hiebert y Grouws (2007, p. 372) también muestran su escepticismo sobre este tema, “Teorías útiles y robustas sobre la enseñanza en la clase no existen. Teorías que consideren las conexiones entre la enseñanza en la clase y el aprendizaje de los estudiantes están incluso menos desarrolladas”

A lo sumo encontramos planteamientos generales de índole cognitivo o sociocultural (diversos enfoques constructivistas, interaccionistas, ...), que no tienen en cuenta la especificidad del conocimiento matemático. Frankle, et al. (2007, p. 250) advierten que, “No podemos ignorar que orquestar el discurso matemático sobre el pensamiento algebraico puede requerir una mirada diferente a orquestar el discurso sobre la adición de números enteros”.

La complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje nos lleva a ser extremadamente precavidos en la proposición de normas y reglas para la intervención en los sistemas didácticos. Ciertamente no disponemos de recetas de cómo enseñar, pero esto no significa que no tengamos ciertos conocimientos que nos permiten tomar algunas decisiones locales preferentes. Consideramos razonable aceptar la siguiente hipótesis metodológica: Fijadas unas circunstancias (sujetos, recursos, restricciones, ...), un “experto” en una didáctica específica puede razonar (apoyándose en resultados teóricos contrastados empíricamente) que ciertas tareas y modos de interacción en el aula son preferibles a otras diferentes. En última instancia este es el objetivo de la ciencia y tecnología del diseño educativo (Reigeluth, 2000).

En este trabajo abordamos la problemática del diseño instruccional en educación matemática desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Presentaremos la noción de idoneidad didáctica y el sistema de indicadores empíricos que la desarrollan, introducida en trabajos previos (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007), como un primer paso en la construcción de una teoría de la instrucción matemática¹ orientada hacia la mejora progresiva de la práctica de la enseñanza de las matemáticas.

2. Teoría de la idoneidad didáctica

Pensamos que el EOS, en particular la noción de idoneidad didáctica, puede aportar elementos originales y significativos para elaborar una teoría de diseño instruccional, apropiada para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y otras áreas curriculares. Una teoría de la instrucción en un área de contenido específico no puede dar recetas de actuación para cada circunstancia, pero sí principios y criterios generales basados en resultados contrastados por la investigación para los cuales existe consenso en la comunidad científica correspondiente.

¹ Usamos la palabra instrucción para referirnos a la articulación entre las actividades de enseñanza y aprendizaje dirigidas hacia el logro de unos fines educativos específicos, condicionadas por restricciones del entorno y apoyadas en el uso de medios tecnológicos determinados.

En el siguiente apartado describimos los supuestos epistemológicos, semióticos y cognitivos de los que parte el EOS, los cuales pueden servir de apoyo para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje. A continuación introducimos la noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones y nociones sobre las cuales se apoya. En la sección 3 incluimos los criterios de idoneidad en las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, así como algunos indicadores que permiten su aplicación a la práctica docente. Concluimos con unas observaciones finales acerca del alcance de la noción de idoneidad didáctica como noción clave de una teoría de la instrucción matemática orientada hacia la reflexión sobre la práctica.

2.1. Motivación y supuestos del EOS

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Con dicho fin se adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas y las interacciones entre las mismas, como se representa en el figura 1. Se resalta el carácter relacional y multidimensional de la enseñanza de las matemáticas.

“La enseñanza es relacional. Los profesores, los estudiantes, y el contenido sólo se pueden comprender unos en relación a los otros. El profesor trabaja para orquestrar el contenido, las representaciones del contenido, y las interrelaciones de las personas que intervienen en la clase. Los modos de estar de los estudiantes, sus formas de participación, y su aprendizaje emerge de estas relaciones mutuamente constitutivas. La enseñanza es también multidimensional”
(Frankle, Kazemi y Battey, 2007, p. 227)



Figura 1. Facetas y niveles de análisis didáctico

Para las facetas epistémica y ecológica de la actividad matemática se asumen presupuestos antropológicos/ socioculturales (Bloor, 1983; Chevallard, 1992; Radford, 2006); en cuanto a las facetas cognitiva y afectiva se adoptan presupuestos semióticos (Eco, 1976; Hjelmslev, 1943; Peirce, 1931-58); y para la faceta instruccional (interaccional y mediacional) se asume una perspectiva socio-constructivista (Brousseau, 1997; Ernest, 1998). Se reconoce la complejidad de los procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, por las

interacciones sistémicas entre las distintas facetas y componentes, asumiendo un paradigma de complejidad sistémica como propone Morin (1994)². Dichas facetas se deben analizar según diversos niveles: las prácticas o acciones de los agentes implicados, las configuraciones de los objetos intervinientes, las normas que condicionan y soportan la realización de las prácticas y la valoración de la idoneidad o adecuación del proceso educativo en toda su globalidad (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009).

2.2. La noción de idoneidad didáctica

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y desglose operativo, han sido introducidos en el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) como herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. Consideramos que esta noción puede servir de punto de partida para una teoría de diseño instruccional (Teoría de la Idoneidad Didáctica) que tenga en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones epistémica – ecológica, cognitiva – afectiva, interaccional – mediacional implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Batanero y Font, 2007):

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad afectiva*, grado de implicación (interés, motivación, ...) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- *Idoneidad ecológica*, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

² “Así es que, habría que sustituir al paradigma de disyunción /reducción /unidimensionalización por un paradigma de distinción /conjunción que permita distinguir sin desarticular, asociar sin identificar o reducir “ (Morin, 1994, p. 34)

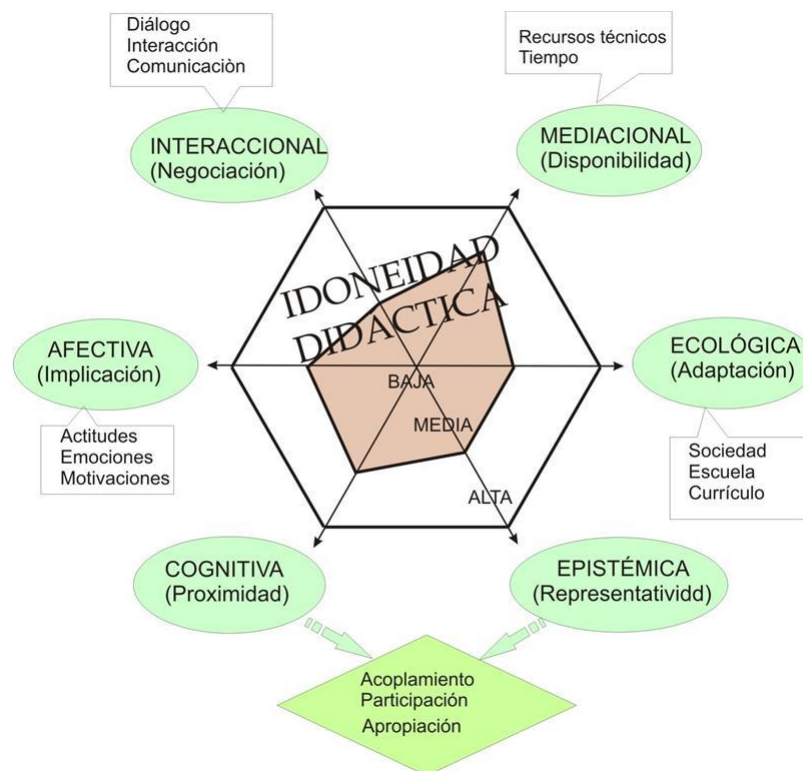


Figura 2. Idoneidad didáctica

La figura 2 resume las principales características de dicha noción. Representamos mediante el hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o planificado, donde *a priori* se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización del proceso de estudio implementado. Situamos en la base las idoneidades epistémica y cognitiva al considerar que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos. “Diferentes tipos de cosas que deben ser aprendidas requieren diferentes tipos de apoyos para su aprendizaje (Spector, 2001, p. 391).

Las idoneidades epistémica y cognitiva no se pueden reducir a los componentes conceptuales, procedimentales y actitudinales, como habitualmente se considera en las directrices curriculares, en una visión dualista y disociada del conocimiento matemático. El primer paso para poder confeccionar un programa de estudio es determinar qué es idóneo desde los puntos de vista epistémico y cognitivo (así como la coordinación de estas idoneidades). La ontología (junto con las facetas duales) propuesta por el EOS permite describir las idoneidades epistémica y cognitiva en términos de configuraciones epistémicas y cognitivas (conglomerado de situaciones-problema, definiciones, procedimientos, proposiciones, lenguajes y argumentos). El núcleo de dichas configuraciones son las situaciones-problemas seleccionadas para contextualizar y personalizar los significados, aunque ello no implica dejar de reconocer un papel importante al empleo de tareas rutinarias, necesarias para el desarrollo de competencias procedimentales y algorítmicas.

En las definiciones presentadas de las idoneidades epistémica, cognitiva e interaccional juega un papel central la noción de significado. En el EOS, el significado se concibe en términos de “sistemas de prácticas operativas y discursivas (institucionales y personales)”. Tales sistemas de prácticas se hacen operativos mediante las correspondientes configuraciones (epistémicas o cognitivas), y son relativos al marco institucional, las culturas y comunidades de prácticas. De aquí se deriva que la idoneidad didáctica es relativa a las

circunstancias locales en que tiene lugar el proceso de estudio: “Una característica fundamental de las teorías de diseño educativo consiste en que los métodos que proponen son situacionales más que universales” (Reigeluth, 2000, p. 18).

Los distintos elementos interactúan entre sí, lo que sugiere la extraordinaria complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El logro de una idoneidad alta en una de las dimensiones, por ejemplo, la epistémica, puede requerir unas capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los que se dirige la enseñanza. Una vez logrado un cierto equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva es necesario que la trayectoria didáctica optimice la identificación y solución de conflictos semióticos y se creen las condiciones para el desarrollo de competencias comunicativas. Los recursos técnicos y el tiempo disponible también interaccionan con las situaciones-problemas, el lenguaje, etc.

“El aprendizaje individual es una criatura compleja con muchas necesidades las cuales tienen que satisfacerse para que el aprendizaje tenga éxito. El principio de una “dieta equilibrada” es por tanto aplicable tanto para nuestras mentes como para nuestros cuerpos” (Sfard, 2002, p. 30).

Frankle, Kazemi y Battey (2007, p. 226) resaltan también la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

“Claramente, la enseñanza no consiste solo en comenzar con problemas matemáticos ricos, incluso aunque estén conectados con la forma de pensar de los estudiantes. Tampoco consiste en escuchar a los estudiantes y pedirles que describan lo que piensan. Aunque estas son partes centrales del trabajo, y aunque los investigadores en el campo están comenzando a ponerse de acuerdo sobre las características centrales de la práctica de la clase, tenemos todavía mucho que hacer para elaborar los detalles.”

La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o “incidentes didácticos” puntuales.

3. Indicadores de idoneidad didáctica

Para realizar una acción educativa idónea se requiere disponer de directrices claras y explícitas sobre los fines y líneas generales de actuación. Metafóricamente, se trata de disponer del plano o croquis del territorio que se debe recorrer; pero es el profesor quien dirige la acción efectiva en el territorio, para lo cual debe disponer de medios para orientarse. La investigación educativa proporciona los sistemas de referencia, las metas a lograr y medios de “navegación”, pero las decisiones locales están bajo la responsabilidad del docente. Las circunstancias locales y temporales pueden hacer que la trayectoria idónea no sea la marcada a priori por las directrices externas, por las “leyes” o tendencias estadísticas; la acción instruccional está sujeta a variaciones locales, frecuentemente caóticas.

El logro de una alta idoneidad didáctica de un proceso de estudio, como también su valoración, es un proceso sumamente complejo puesto que, como hemos visto, involucra diversas dimensiones, que a su vez están estructuradas en distintas componentes. Además, tanto las dimensiones como los componentes no son observables directamente y, por lo tanto, es necesario inferirlos a partir de indicadores empíricos. En las secciones 3.1 a 3.7 presentamos algunos indicadores de las distintas idoneidades parciales y de las interacciones

entre las mismas, los cuales pueden servir de pauta o guía para el diseño y valoración de acciones formativas planificadas o efectivamente implementadas³.

3.1. Idoneidad epistémica

Como hemos indicado entendemos que un programa formativo, o un proceso de estudio matemático, tiene mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan bien a un significado de referencia. Dicho significado de referencia será relativo al nivel educativo en el que tiene lugar el proceso de estudio y deberá ser elaborado teniendo en cuenta los diversos tipos de problemas y contextos de uso del contenido objeto de enseñanza, así como las prácticas operativas y discursivas requeridas.

En la tabla 1 incluimos los componentes y algunos indicadores relevantes que permiten hacer operativa la noción de idoneidad epistémica (o matemática). Seguidamente mencionamos algunas concordancias de estos componentes e indicadores con los propuestos por diversas teorías, y en particular los Principios y Estándares para la enseñanza de las matemáticas formulados por el NCTM (2000).

Tabla 1. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática)

COMPONENTES:	INDICADORES:
Situaciones-problemas	<ul style="list-style-type: none"> - Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	<ul style="list-style-type: none"> - Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos. - Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige - Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	<ul style="list-style-type: none"> - Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos
Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> - Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	<ul style="list-style-type: none"> - Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.

En el marco del EOS se atribuye a las situaciones problemas un papel central, ya que se asume una concepción antropológica de la matemática, de modo que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinadas “tareas problemáticas”. Esta posición es concordante con la “Teoría de situaciones didácticas” (Brousseau, 1997)⁴ y también con la “Educación matemática realista” (EMR) (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005), basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983; 1991). En estas teorías, y en diversas propuestas curriculares, se propone el uso de situaciones - problemas

³ En estas secciones se amplía la “Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) y se relaciona con los criterios y principios propuestos en documentos curriculares y otras teorías usadas en educación matemática.

⁴ Y de su desarrollo en la “Teoría de los momentos didácticos” elaborada por Chevallard (1999) en el marco del enfoque antropológico en Didáctica de las Matemáticas.

como medio de contextualizar las ideas matemáticas y generarlas a partir de la actividad de resolución, comunicación y generalización de las soluciones.

“La resolución de problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacer matemáticas. Esta es una parte integral de las matemáticas, no una pieza aislada del programa de matemáticas. Los estudiantes necesitan tener oportunidades frecuentes para formular, enfrentar y resolver problemas complejos que requieren mucho esfuerzo” (NCTM, 2000, p. 51).

Los principios de actividad y de realidad de la EMR apoyan la consideración de los indicadores recogidos en la Tabla 1 como indicadores de idoneidad epistémica. Para Freudenthal (1991) las matemáticas son una actividad humana. “No hay matemáticas sin matematización”, actividad que puede ser de aplicación a resolver problemas del entorno, o problemas de reorganización del propio conocimiento matemático.

Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones.

También se debe prestar atención a las conexiones entre las distintas partes del contenido matemático, y la articulación de los diversos significados parciales de los objetos en estudio (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2010). Las matemáticas son un campo de estudio integrado. “En un currículo coherente, las ideas matemáticas están relacionadas y se construyen unas sobre otras. (NCTM, 2000, p.14). Esta posición concuerda con el “Principio de interconexión” de la “Educación matemática realista”. Los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría, ...) no pueden ser tratados como entidades separadas. Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados. Además, la resolución de problemas de contexto ricos con frecuencia significa que tienes que aplicar un amplio rango de herramientas y comprensiones matemáticas.

3.2. Idoneidad cognitiva

Definimos la idoneidad cognitiva como el grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos (Vygotski, 1934). La tabla 2 incluye los componentes e indicadores seleccionados.

Tabla 2. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

COMPONENTES:	INDICADORES:
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	<ul style="list-style-type: none"> - Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	<ul style="list-style-type: none"> - Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes

Aprendizaje: (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos)	<ul style="list-style-type: none"> - Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia): - Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.
--	---

En el marco del EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados. Los significados son entendidos en términos de prácticas operativas y discursivas y supone además el reconocimiento e interrelación de los objetos que intervienen en dichas prácticas.

Tres de los seis principios formulados por el NCTM (2000) sobre la enseñanza de las matemáticas tienen relación con la idoneidad cognitiva. El principio de igualdad indica, “La excelencia en la educación matemática requiere igualdad, grandes expectativas y un fuerte apoyo para todos los estudiantes”. Se exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas, y que sean incluidos contenidos motivadores para promover el acceso y el logro de todos los estudiantes. El principio de aprendizaje requiere que “Los estudiantes deben aprender las matemáticas entendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos”. Así mismo, el principio de evaluación afirma que, “La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas relevantes y proveer de información útil tanto a profesores como estudiantes”.

3.3. Idoneidad afectiva

La emisión de un juicio sobre la mayor o menor idoneidad afectiva del proceso en cuestión se basa en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. La tabla 3 incluye los componentes e indicadores seleccionados.

Tabla 3. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

COMPONENTES:	INDICADORES:
Intereses y necesidades	<ul style="list-style-type: none"> - Las tareas tienen interés para los alumnos - Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional
Actitudes	<ul style="list-style-type: none"> - Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. - Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	<ul style="list-style-type: none"> - Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. - Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

La resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también moviliza creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan en mayor o menor grado y diferente sentido la respuesta cognitiva requerida.

Los objetos y procesos afectivos son usualmente considerados como entidades psicológicas, que refieren a estados o rasgos mentales más o menos estables, o a disposiciones para la acción de los sujetos individuales. Pero desde el punto de vista educativo el logro de unos estados afectivos que interaccionen positivamente con el dominio cognitivo tienen que ser objeto de consideración por parte de las instituciones educativas, y, en particular, por el profesor. El dominio afectivo conlleva, por tanto, una faceta institucional y se concreta en normas de índole afectivo que condicionan el trabajo del profesor.

3.4. Idoneidad interaccional

Es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado, favorecen la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas. En la tabla 4 incluimos algunos indicadores de idoneidad referidos a las interacciones entre el profesor y los estudiantes y entre los propios estudiantes. Teniendo en cuenta principios de aprendizaje socio-constructivista ampliamente asumidos se valora positivamente la presencia de momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del aprendizaje. La aceptación de este principio de autonomía en el aprendizaje es un rasgo característico de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), en la que las situaciones de acción, comunicación y validación se conciben como momentos adidácticos de los procesos de estudio, esto es, situaciones en las que los alumnos son protagonistas en la construcción de los conocimientos pretendidos.

Tabla 4. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

COMPONENTES:	INDICADORES:
Interacción docente-discente	<ul style="list-style-type: none"> - El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) - Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) - Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. - Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase
Interacción entre alumnos	<ul style="list-style-type: none"> - Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes - Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos - Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión
Autonomía	<ul style="list-style-type: none"> - Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa	<ul style="list-style-type: none"> - Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

La toma de decisiones sobre la progresión del estudio, tanto por parte del docente como de los estudiantes, requiere la puesta en práctica de procedimientos de observación y encuesta para una evaluación formativa de los aprendizajes

La importancia del discurso, el diálogo, la conversación en la clase es resaltada por diversos autores: “La naturaleza del discurso matemático es una característica central de la práctica de la clase. Si aceptamos seriamente que los profesores necesitan oportunidades para aprender a partir de su práctica, el desarrollo de conversaciones matemáticas permite a los profesores aprender continuamente de sus estudiantes. Las conversaciones matemáticas que se

centran sobre las ideas de los estudiantes pueden proporcionar a los profesores una ventana sobre el pensamiento de los estudiantes de manera que el trabajo individual de los estudiantes no lo permite” (Frankle, Kazemi y Battey (2007, p. 237).

En el marco de la Educación Matemática Realista se asume un principio de interacción, según el cual, la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. Los estudiantes, en lugar de ser receptores de una matemática ya elaborada, son considerados como participantes activos del proceso de enseñanza - aprendizaje, en el que ellos mismos desarrollan herramientas y comprensiones, y comparten sus experiencias unos con otros. La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los métodos formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005, p. 290).

Uno de los principios fundamentales de Freudenthal (1991) para la educación matemática es que se debe dar a los estudiantes una “oportunidad guiada” de "reinventar" las matemáticas. Esto implica que, en la EMR, tanto los profesores como los programas educativos tienen un papel fundamental en cómo los estudiantes adquieren los conocimientos. Ellos dirigen el proceso de aprendizaje, pero no de una manera fija mostrando lo que los estudiantes tienen que aprender. Esto estaría en contradicción con el principio de actividad y daría lugar a comprensiones falsas.

3.5. Idoneidad mediacional

Se entiende la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El uso apropiado de la tecnología es uno de los principios formulados por el NCTM (2000, p.24), indicándose, “La tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y, a su vez, incrementar el aprendizaje de los estudiantes”. Esta organización profesional sostiene que la tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje matemático en el siglo 21, y todas las escuelas deben asegurar que todos sus estudiantes tienen acceso a la tecnología. Los profesores efectivos maximizan el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión de los estudiantes, estimular su interés, e incrementar su proficiencia en matemáticas. Cuando la tecnología se usa estratégicamente, puede proporcionar acceso a las matemáticas para todos los estudiantes⁵. Se considera, así mismo, que las calculadoras y demás herramientas tecnológicas, como sistemas de cálculo algebraico, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos de presentación interactiva, son componentes vitales de una educación matemática de alta calidad.

En la tabla 5 incluimos algunos componentes e indicadores de idoneidad en el uso de recursos tecnológicos, incluyendo artefactos manipulativos. También se debe considerar como factor determinante de la idoneidad mediacional las condiciones ambientales de la clase, la ratio profesor/alumnos y el tiempo asignado a la enseñanza y el aprendizaje.

⁵ <http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233>

Tabla 5. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

COMPONENTES:	INDICADORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	<ul style="list-style-type: none"> - Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido - Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	<ul style="list-style-type: none"> - El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida - El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora) - El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	<ul style="list-style-type: none"> - El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida - Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema - Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión

3.6. Idoneidad ecológica

La idoneidad ecológica se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza. Por entorno entendemos todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. Así, nos podemos referir a todo lo que viene en general condicionada por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas. El proceso de estudio tiene lugar en un contexto educativo que fija unos fines y valores para la educación de los ciudadanos y profesionales que se deben respetar. Dichos fines y valores son interpretados y especificados dentro del proyecto educativo del centro o departamento que coordina la acción de los distintos profesores implicados. El docente forma parte de una comunidad de estudio e indagación que aporta conocimientos útiles sobre prácticas matemáticas y didácticas idóneas que se deberán conocer y aplicar.

La educación matemática crítica (Skovsmose, 1994) aporta ideas para lograr que la enseñanza de las matemáticas permita a los ciudadanos ser parte activa de una sociedad democrática. Más allá del aprendizaje matemático individual de cada persona, se hace necesario formular reflexiones sobre las consecuencias colectivas de este aprendizaje en la sociedad actual. En la escuela, la enseñanza de las matemáticas puede ejercer una gran influencia en dos sentidos totalmente opuestos: por un lado, las matemáticas se pueden presentar como reducidas a meros cálculos rutinarios, lo que puede reforzar actitudes pasivas y complacientes o, por el contrario, con un sentido más amplio y en consecuencia puede desarrollar el pensamiento crítico y alternativo.

Otros componentes e indicadores de idoneidad ecológica se incluyen en la tabla 6, en particular las conexiones del contenido matemático con otras áreas curriculares, y entre distintas áreas temáticas dentro de la propia matemática.

Tabla 6. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

COMPONENTES:	INDICADORES:
Adaptación al currículo	<ul style="list-style-type: none"> - Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares
Apertura hacia la innovación didáctica	<ul style="list-style-type: none"> - Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en

	el proyecto educativo
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico
Conexiones intra e interdisciplinarias	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios

Las matemáticas se deben enseñar de manera que sean útiles para el ciudadano y los profesionales, no como un sistema cerrado ajeno a las aplicaciones que constituyen su origen y razón de ser. “Estoy convencido de que si no tenemos éxito en enseñar las matemáticas de manera que sean útiles, los usuarios de las matemáticas decidirán que su enseñanza es un tema demasiado importante como para dejarlo en manos del profesor de matemáticas. Naturalmente esto sería el fin de toda la educación matemática” (Freudenthal, 1968, p. 8)

3.7. Interacciones entre facetas

En los apartados anteriores hemos identificado algunos indicadores de idoneidad para las seis facetas que proponemos en el análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Dichas facetas no se deben considerar como factores independientes, ya que de hecho se producen interacciones entre las mismas. Así, por ejemplo, el uso de un recurso tecnológico puede determinar que se puedan abordar determinados tipos de problemas y las configuraciones de objetos y procesos correspondientes, lo cual conlleva nuevas formas de representación, argumentación, generalización, etc. También se pueden ver afectadas las formas de interacción entre el profesor y los estudiantes, el interés y motivación, y en definitiva los aprendizajes. En la tabla 7 incluimos algunos indicadores de idoneidad relativos a interacciones entre facetas.

Tabla 7. Componentes e indicadores de idoneidad de interacciones entre facetas

COMPONENTES:	INDICADORES:
Epistémica-ecológica	- El currículo propone el estudio de problemas de ámbitos variados como la escuela, la vida cotidiana y el trabajo.
Epistémica-cognitiva-afectiva	- El contenido del estudio (fenómenos explorados en las diferentes áreas de contenido, formulando y justificando conjeturas) tiene sentido para los estudiantes en los distintos niveles y grados. - Los estudiantes tienen confianza en sus habilidades para enfrentar problemas difíciles y mantienen su perseverancia aun cuando la tarea sea compleja. - Se estimula a los estudiantes a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de problemas de manera tal que son capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y contextos. - Las tareas que los profesores seleccionan para evaluar son representativas de los aprendizajes pretendidos.
Epistémica-cognitiva mediacional	- El uso de recursos tecnológicos induce cambios positivos en el contenido de enseñanza, en los modos de interacción, motivación y en el aprendizaje de los estudiantes.
Cognitiva-afectiva-interaccional	- Las explicaciones dadas por los estudiantes incluyen argumentos matemáticos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos. - Se incluyen contenidos motivadores, con adaptaciones razonables y apropiadas, que promueven el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Ecológica-instruccional	- El profesor es comprensivo y dedicado a sus estudiantes.

(papel del docente y su formación)	<ul style="list-style-type: none"> - El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza. - El profesor tiene amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico-matemáticos
------------------------------------	---

El principio de enseñanza del NCTM (2000) reclama atención a las conexiones entre aspectos cognitivos – afectivos e instruccionales: “Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere saber y comprender qué es lo que los estudiantes saben y necesitan aprender de las matemáticas; y luego motivarlos y apoyarlos para que las aprendan bien”.

En el caso de la EMR la adopción del principio de interacción implica que la enseñanza a toda la clase tiene un papel importante. Sin embargo, esto no quiere decir que toda la clase se lleva conjuntamente y que cada estudiante está siguiendo el mismo camino y está alcanzando el mismo nivel de desarrollo en el mismo momento. Por el contrario, dentro de la EMR, los niños son considerados como individuos, cada uno siguiendo una trayectoria de aprendizaje individual. Esto se puede hacer por medio de proporcionar a los estudiantes problemas que pueden resolverse según diferentes niveles de comprensión.

El uso de modelos propuesto en la EMR relaciona aspectos mediacionales, epistémicos (representacionales, fenomenológicos), cognitivos e instruccionales. Se afirma que los modelos sirven como una herramienta clave para salvar esta distancia entre las matemáticas informales, relacionadas con el contexto y las matemáticas más formales. En primer lugar, los estudiantes desarrollan estrategias estrechamente relacionada con el contexto. Más tarde, algunos aspectos de la situación de contexto se pueden generalizar, lo que significa que el contexto más o menos, adquiere el carácter de un modelo y como tal puede dar apoyo a la solución de otros problemas relacionados entre sí. Finalmente, los modelos permitirán el acceso de los estudiantes al conocimiento matemático más formal. A fin de cumplir la función de puente entre los niveles formales e informales, los modelos han de pasar de un "modelo de" una situación particular, a un "modelo para" todos los tipos de situaciones equivalentes (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005, p. 289).

El principio de realidad (EMR) pone en relación aspectos epistémicos y cognitivos. El objetivo general de la educación matemática es que los estudiantes deben ser capaces de utilizar sus conocimientos matemáticos y herramientas para resolver problemas. Este principio de realidad no sólo es reconocible al final del proceso de aprendizaje en el ámbito de la aplicación de las matemáticas, la realidad es concebida como una fuente para el aprendizaje de las matemáticas. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana como a situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos. Al igual que las matemáticas surgieron de la matematización de la realidad, también el aprendizaje debería originarse al matematizar la realidad. En vez de comenzar con ciertas abstracciones o definiciones que deben aplicarse más tarde, se debe comenzar con contextos ricos, que requieren organización matemática o, en otras palabras, contextos que pueden ser matematizados (Freudenthal, 1968).

Idoneidad temporal y su relación con las restantes facetas

El tiempo dedicado a la enseñanza y el aprendizaje, y su gestión por parte del profesor y de los estudiantes, es un componente determinante de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio. Este factor ha sido incluido como un recurso más en la faceta mediacional, junto con los recursos tecnológicos. Sin embargo, el tiempo interacciona también con las diversas

facetas. En la tabla 8 incluimos algunos indicadores de idoneidad temporal en relación a las facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica.

Tabla 8: Componentes e indicadores de idoneidad temporal

COMPONENTES	INDICADORES
Temporal-epistémico	- El contenido y sus diversos significados se distribuyen de manera racional a lo largo del tiempo asignado al estudio
Temporal-cognitivo	- Los objetivos de aprendizaje tienen en cuenta las etapas de desarrollo evolutivo de los estudiantes
Temporal-instruccional	- La gestión del tiempo instruccional tiene en cuenta los diversos momentos requeridos para el desarrollo de los distintos tipos de aprendizajes (exploración, formulación, comunicación, validación, institucionalización, ejercitación, evaluación)
Temporal-ecológico	- El tiempo asignado al proceso de estudio en el diseño curricular es adecuado para lograr el aprendizaje del contenido programado.

El principio de currículo del NCTM (2000) relaciona la faceta epistémica (inclusión de matemáticas relevantes y colección de actividades), conexión y articulación entre los diferentes niveles: “Un currículum es más que una colección de actividades. Este debe ser coherente, estar focalizado en matemáticas relevantes y estar bien articulado a través de los diferentes niveles”. También la EMR incluye un principio relacionado con los niveles de aprendizaje. Aprender matemáticas significa que los estudiantes pasan a través de distintos niveles de comprensión: desde la capacidad de inventar soluciones informales relacionadas con el contexto, a la creación de distintos niveles de atajos y esquematizaciones, a la adquisición de conocimiento de los principios subyacentes y el discernimiento de relaciones más amplias. La condición para llegar al siguiente nivel es la capacidad de reflexionar sobre las actividades realizadas.

4. Observaciones finales

Como hemos indicado, la noción de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores empíricos, ha sido introducida a partir de un modelo explícito sobre el conocimiento matemático sobre bases pragmatistas - antropológicas. La introducción de la dualidad personal - institucional de los sistemas de prácticas y de las configuraciones de objetos y procesos permite aplicar sistemas de categorías similares para describir el conocimiento de los sujetos individuales y el conocimiento institucional, para el cual se postula un tipo de realidad objetiva, aunque culturalmente relativa. Otra noción clave del EOS es la de significado, entendido como contenido de las funciones semióticas, o relaciones entre objetos, configuraciones y sistemas de prácticas, la cual permite concebir el aprendizaje en términos de apropiación de significados. Las nociones cognitivas de conocimiento, comprensión, competencia y disposición para la actividad matemática quedan articuladas con la interpretación sistémica y compleja del significado desarrollada en el EOS.

Con la noción de idoneidad didáctica tratamos de desarrollar algunas consecuencias del marco epistemológico y cognitivo del EOS para el diseño, implementación y evaluación de intervenciones educativas, lo que requiere asumir nuevos presupuestos relativos a las interacciones entre los sujetos, el uso de recursos tecnológicos y las relaciones ecológicas con

el entorno. Las nociones de conflicto semiótico y la negociación de significados se adoptan como criterio principal de optimización de las interacciones.

La teoría de la idoneidad didáctica trata de interrelacionar las distintas facetas que intervienen en el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Las nociones de idoneidad epistémica y ecológica y el sistema de indicadores asociados constituyen el germen de una teoría curricular, mientras que los correspondientes a las facetas cognitiva – afectiva lo constituye para una teoría del aprendizaje. Las facetas interaccional y mediacional contienen, a su vez, el germen de una teoría de la enseñanza.

Aunque el logro de una alta idoneidad didáctica de un programa o de una acción formativa requiere prestar atención a las distintas facetas que hemos descrito, consideramos que se debe reconocer un papel prioritario a las facetas epistémica, mediacional y ecológica. La superación de las dificultades en el aprendizaje requerirá actuar sobre los significados pretendidos, para adaptarlos al nivel y al contexto educativo correspondiente, así como sobre el uso de nuevos recursos, en particular, disponer de un tiempo adecuado. El objetivo de lograr desarrollar las competencias de los alumnos para resolver problemas complejos, que se considera central en las reformas educativas, no se puede conseguir mediante proclamas sobre heurística y de aprendizaje autónomo - constructivista. El punto crucial será actuar sobre el contenido de enseñanza, entendido de una manera compleja y sistémica como propone el EOS, y sobre los medios asignados a la instrucción.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MCINN), España.

Referencias

- Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press.
- Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
- Eco, U. (1991). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.
- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York: SUNY.
- Franke, M. L., Kazemi, E. y Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En F.K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). Charlotte, NC: NCTM & IAP.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht:

Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. China Lectures. Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3), 237–284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2010). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*. DOI 10.1007/s10649-010-9278-x.

Hiebert, J. y Grouws D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Charlotte, NC: NCTM. & IAP.

Hjalmarson, M. A. y Lesh, R. (2008). Design research. Engineering, systems, products, and processes for innovation. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 520-534). New York: Routledge.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos.

Lesh, R. y Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. En B. Sriraman y L. English (eds), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers*. (pp. 123-146). Heidelberg: Springer.

Morin, E. (1994). *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona: Gedisa.

Peirce, C. S. (1931-58). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (Eds.). Cambridge: Harvard University Press

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Número especial, pp. 7-22.

- Reigeluth, C. M. (2000). ¿En qué consiste una teoría de diseño educativo y cómo se está transformando?. En C. M. Reigeluth (Ed.), *Diseño de la instrucción. Teorías y modelos. Un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción* (pp. 15-40). Madrid: Santillana
- Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, 4 (1), 1-94.
- Schoenfeld, A. H. (2000). Models of teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (3), 243- 261.
- Sfard, A. (2002). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics. En J. Kilpatrick, Martin, G., & Schifter, D. (Eds.), *A Research Companion for NCTM Standards*. Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics.
- Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Spector, J. M. (2001). Philosophical implications for the design of instruction. *Instructional Science* 29, 381–402.
- Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica-Grijalbo.
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27 (1), 77 - 120.
- Wittman, E. C. (1995). Mathematics education as a ‘design science. *Educational Studies in Mathematics*, 29 (4), 355-374.