Construcciones, ¿Solamente con regla y compás?

Etda Luisa **Rodríguez** Minarsky
Consejo de Formación en Educación – Profesorado en modalidad Semipresencial
Sociedad de Educación Matemática Uruguaya
Uruguay
etdarm@gmail.com

Resumen

Desde la antigua Grecia, al plantear la resolución de problemas que involucran la construcción de figuras del plano, está implícito el uso de la regla y el compás. En el mini-curso que presentamos abordaremos la resolución de problemas de construcción utilizando un solo instrumento: la regla de dos bordes paralelos, también llamada regla de dos bandas. Podremos observar que al cambiar las condiciones para la construcción estamos proponiendo un nuevo tipo de problemas. A través del trabajo con la regla de dos bandas se intentará sugerir la influencia directa de los instrumentos disponibles sobre el tipo de conocimiento que se elabora. Como consecuencia de estos cambios es razonable que nos preguntemos: ¿Todas las figuras que son constructibles con regla y compás, serán también constructibles con la regla de dos bandas? ¿Y a la inversa?

Palabras clave: variable didáctica, propiedades geométricas, problemas de construcción, banda de dos bordes paralelos.

A propósito de las dificultades en el aprendizaje de la Geometría

A modo de introducción entendemos que es conveniente presentar brevemente cuáles son las principales dificultades que se les pueden presentar a nuestros alumnos en el momento de resolver algunos problemas en Geometría.

Una de ellas tiene que ver con la naturaleza propia de los objetos geométricos y su representación espacial. Hay que tener en cuenta que la dualidad dibujo/figura genera conflicto y las distinciones entre el objeto geométrico y su representación espacial no suelen ser trabajadas en forma explícita.

Otra de las dificultades se relaciona con las destrezas lógicas exigidas al alumno en el trabajo geométrico: los alumnos no suelen sentir la necesidad de demostrar proposiciones geométricas que son sumamente visualizables, así como por la misma razón no les resulta sencillo apreciar la fuerza explicativa de una demostración.

Finalmente, la visualización, que es parte fundamental del trabajo geométrico, puede generar diversos obstáculos cognitivos, como ser: 1) Existen distintas interpretaciones posibles de un dibujo, pero solo unas pocas se relacionan con la figura a la que se refiere el problema. 2) El abuso de las posiciones prototípicas. 3) La necesidad de cambios de puntos de vista entra en conflicto con la globalidad en la presentación de la información que caracteriza a un diagrama. 4) La necesidad de considerar elementos no dibujados.

Nuevas estrategias didácticas

Las investigaciones en Didáctica de la Geometría sugieren que una manera apropiada de enfrentar estas dificultades es desarrollar el estudio de la Geometría desde un enfoque más empírico, que permita a los alumnos investigar y conjeturar, para estimular la necesidad de demostraciones en los alumnos.

Al mismo tiempo, se sugiere la importancia de diseñar situaciones didácticas en las que el centro de atención esté en la explicitación de las relaciones entre los conceptos que componen una figura, por oposición a centrar la atención en la producción de un dibujo que la represente adecuadamente.

Esta explicitación está también dirigida hacia una mejor comprensión de las diferencias entre dibujar y construir, que, lejos de ser trivial, plantea una compleja actividad cognitiva donde el estudiante debe dejar de entender a los objetos geométricos como productos para pasar a considerarlos herramientas de creación de nuevos objetos.

A propósito de la resolución de problemas de construcción en Geometría

Sobre las competencias matemáticas

Cuando en los cursos de Geometría proponemos a nuestros alumnos la resolución de problemas de construcción posibilitamos que estén en situación de hacer cosas nuevas y no estén simplemente repitiendo lo que otras generaciones han hecho. De modo que al plantearles este tipo de problemas los estimulamos para que sean personas creativas, que tengan inventiva y que sean descubridores. También favorecemos el desarrollo de diversas competencias. Así vemos que al intentar resolverlos ellos tienen que reconocer y aplicar conceptos matemáticos, establecer relaciones intra y extra matemáticas, plantear una secuencia de estrategias que conducen a la solución del problema, comprender enunciados, identificar datos e incógnitas, seleccionar, ejecutar y validar estrategias que permitan dar respuestas y, finalmente, comunicar resultados haciendo uso de diferentes formas de lenguaje natural o propio de la disciplina.

Al resolver problemas de construcción en Geometría, nuestros alumnos podrán profundizar en el conocimiento de algunas características de las figuras geométricas, al poner en juego la aplicación de muchas propiedades, y también tendrán la oportunidad de argumentar, e incluso demostrar, al tratar de justificar que los trazados realizados cumplen con las condiciones que plantea el problema. Incluso al resolver alguno de estos problemas se puede presentar la necesidad de analizar, de discutir, el número de las soluciones al variar alguno de los datos.

El docente que pretende favorecer el desarrollo de las competencias matemáticas, al proponer este tipo de problemas tiene que esperar que sus alumnos, como culminación del proceso seguido, logren presentar una *respuesta gráfica*, que estará acompañada por el *relato* del procedimiento seguido para resolver la situación, la correspondiente *justificación* y, en el caso que corresponda, la *discusión*.

De modo que al resolver un problema de construcción, no alcanza con presentar como respuesta sólo un dibujo prolijo.

Sobre las herramientas a utilizar

Un aspecto importante que se presenta en el planteo de este tipo de problemas, tiene que ver con los instrumentos que se pueden utilizar para su resolución. Se trata de una variable didáctica que puede ser modificada por el docente para provocar cambios en las estrategias que puede seguir el alumno para resolverlo. El análisis de las variables didácticas permite al docente controlar el efecto que las modificaciones producen sobre la actividad.

Desde que los matemáticos griegos instauraron como los instrumentos matemáticos por excelencia a la *regla y el compás,* hasta nuestros días, cuando en un problema se solicita la construcción de alguna figura geométrica y no se explicita qué instrumentos se pueden usar para resolverlo, siempre se sobreentiende que la situación tiene que ser resuelta con *regla y compás*.

Además de la *regla y el compás*, también tenemos, entre otros, los *softwares dinámicos,* el juego de *escuadras* y la *regla de dos bordes paralelos*.

En el presente trabajo pondremos énfasis en la resolución de problemas geométricos usando la *regla de dos bandas*, de modo que haremos apenas algunos comentarios sobre la realización de construcciones con *regla y compás*, con el juego de *escuadras* y con *softwares dinámicos*.

Sobre el uso de la regla y el compás.

Vamos a comentar brevemente qué lleva implícito proponer la realización de construcciones con *regla y compás*.

Para comenzar nos preguntamos que nos permite trazar este par de instrumentos y cuáles son las condiciones que se sobreentienden cuando solicitamos *construcciones con regla y compás*.

Pues bien por las características de un compás, no hay duda que el mismo nos da la posibilidad de representar circunferencias, de centro y radio dados, es decir nos da la posibilidad de representar puntos que están a una distancia constante de cierto punto dado.

Cuando tomamos una regla, estamos frente a un objeto que tiene la forma de un "rectángulo alargado" y que además sobre alguno de sus bordes presenta una escala graduada. Así que lo que podemos hacer con ella, al deslizar el lápiz por sus bordes, sería dibujar representaciones de rectas y también representaciones de pares de rectas paralelas a la distancia del ancho de la regla, y además, podemos usarla para medir longitudes.

Cuando le preguntáramos a cualquier estudiante qué tiene que hacer si para cierta construcción le estamos solicitando que use *regla y compás*, seguro que se sorprenderá ante nuestra pregunta y, pensando que le preguntamos una tontería, nos responderá que solamente hay que hacer un dibujo prolijo usando la regla y el compás del "juego de instrumentos de Geometría".

Como los docentes conocemos las condiciones qué están implícitas cuando se plantean problemas de construcción con *regla y compás*, tenemos que advertir a nuestros alumnos que, para este tipo de construcciones, las *reglas* sólo se pueden usar para trazar representaciones de rectas y no está permitido usar ni el borde graduado, ni los dos bordes paralelos. En ese momento también sería conveniente mencionarles que para este tipo de problemas lo que deberíamos decir es que usamos un compás y la *regla de un solo borde*.

Es claro que con la *regla y el compás*, además de trazar circunferencias y rectas, también podemos trazar figuras más complejas. Se dice que dichas figuras son *constructibles con regla y compás*. El estudio de su construcción, así como el de sus propiedades, corresponde a la Geometría Euclidiana Plana.

Sobre el uso de la escuadra.

Además de un compás y una regla, los "juegos de Geometría" traen dos escuadras. Todos sabemos que las escuadras nos permiten trazar pares de rectas perpendiculares y, en las clases de Dibujo, es muy conocido el uso de escuadras para el trazado de pares de rectas paralelas. Sin embargo hemos observado, que usualmente, para realizar estos trazados en las clases de Matemática no es frecuente el uso de escuadras y sólo se priorizan los trazados con regla y compás.

En mi opinión el trazado de paralelas utilizando escuadras no puede dejar de ser trabajado, y analizado, en aquellas clases de Matemática en las que se trabajan las propiedades de los ángulos que quedan determinados cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante y sus proposiciones recíprocas. En particular es una oportunidad para analizar las diferencias entre una propiedad y su propiedad recíproca. Diferencia que generalmente nuestros alumnos tienen mucha dificultad en distinguir.

Sobre el uso de los softwares dinámicos.

Los *softwares geométricos* enfatizan la variabilidad de los elementos de una figura al incorporar el movimiento. Al mismo tiempo, ello refuerza la comprensión de la multiplicidad de dibujos que se asocian a una misma figura. Los recursos visuales cumplen un doble papel en la comprensión de la noción de figura geométrica: sugieren heurísticas y ayudan a la validación de una construcción.

Estos softwares favorecen enfoques dinámicos de la Geometría, así como estimulan la comprensión de las relaciones de dependencia geométrica, sin embargo, al enfatizar los aspectos perceptivos del dibujo, pueden generar tendencias inductivistas.

Si dejamos de lado tanto la justificación de los trazados como la habilidad que un individuo pueda tener para dibujar y, sólo enfatizamos los procedimientos seguidos para resolver un problema de construcción, los *softwares dinámicos* nos permiten trabajar casi de la misma manera que si utilizáramos el "juego de instrumentos de Geometría".

El uso de los *softwares geométricos* hace más evidentes aquellos fenómenos didácticos que son independientes de la metodología didáctica o de la herramienta utilizada al trabajar en Geometría, como por ejemplo la distinción entre dibujo y figura, la relación de dependencia entre objetos geométricos, etc.

La resolución de problemas de construcción utilizando la regla de dos bordes paralelos

Es totalmente compartible lo que dicen Chevallard, Bosch y Gascón en el libro *Estudiar Matemáticas. El Eslabón Perdido entre la Enseñanza y el Aprendizaje*: "La cuestión que queremos plantear aquí debería hacer descubrir al lector un *nuevo tipo de problemas* dentro del ámbito de la construcción de figuras geométricas del plano. Se trata de cambiar el sistema clásico formado por la regla y el compás por un *único instrumento de trazado* que utilizamos muy a menudo para fines no matemáticos y que nos es, por ello, mucho más familiar: *la regla de dos bordes paralelos*."

Entonces nos preguntamos ¿Qué figuras podremos construir si sólo contamos con una *regla de dos bandas*? , ¿Cómo se realizan esas construcciones? , ¿Hay figuras que son constructibles con *regla y compás* que también se pueden construir con la *regla de dos bandas*? , ¿Hay figuras constructibles con *regla y compás* que no son constructibles con esta regla? ¿Habrá figuras que siendo constructibles con la *regla de dos bordes paralelos* no se puedan construir con *regla y compás*?

Para intentar responder a estas preguntas observemos que tipo de trazados podemos realizar con esta regla.

- El trazado más sencillo e inmediato, lo obtenemos si seguimos usando la regla como cuando construimos con regla y compás, es decir dados dos puntos trazar la recta que ellos determinan.
- Lo otro que podemos hacer sería trazar un par de rectas paralelas r y s, que pasen respectivamente por dos puntos dados P y Q, tal cual se ilustra en la Figura Nº 1. Observemos que para poder realizar este trazado es necesario que el ancho de la regla sea menor que la distancia entre los puntos dados. También hay que destacar que la distancia entre las paralelas r y s es igual al ancho de la regla. De ahora en adelante a cada par de rectas paralelas que tracemos a la distancia el ancho de la regla le llamaremos "banda", así en la Figura Nº 1 se trazó la banda (r, s).

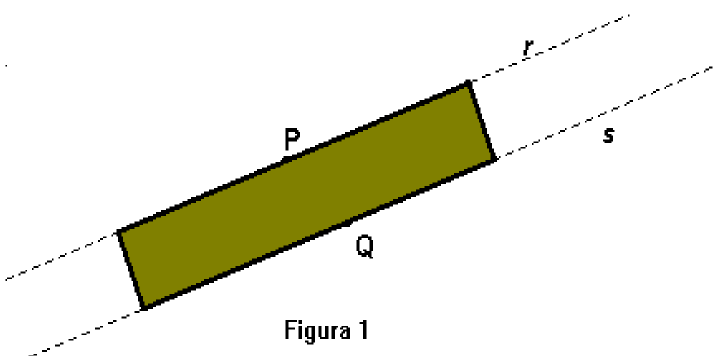

Figura 1

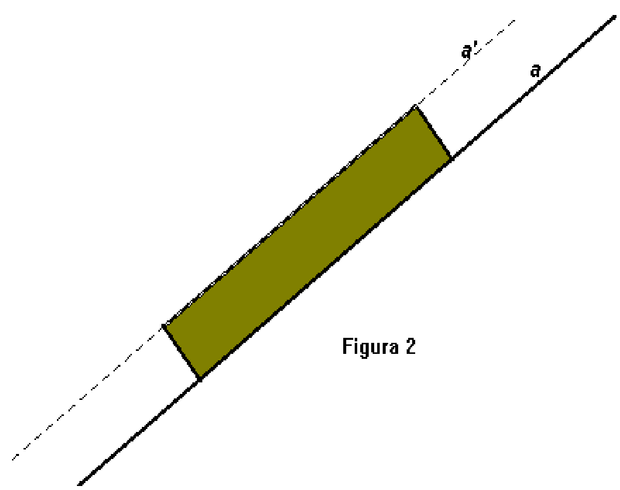

Figura 2

- Por último, el otro trazado que se puede hacer al usar los bordes paralelos de esta regla, se presenta cuando tenemos una recta a, y apoyando uno de los bordes de la regla trazamos la paralela ella en cada uno de los semiplanos que la recta a determina. La Figura Nº 2 muestra la recta a’, paralela a la recta a, tal que la distancia entre las rectas a y a’ es el ancho de la regla, así podemos observar la banda (a, a’).

En el libro recién mencionado se presenta una muy bien ordenada secuencia de problemas para resolver con la regla de dos bordes paralelos. La resolución completa de todos ellos permite dar respuesta a las preguntas recién formuladas.

En este trabajo abordaré un par de estos problemas, sólo como ejemplo de construcciones con la regla de dos bandas y en el mini-curso resolveremos otros que ilustren mejor la potencia de este instrumento para realizar construcciones en Geometría. En el Apéndice se transcribe la colección completa.

Los dos ejemplos que presentamos a continuación apenas ilustran algunas de las relaciones que existen entre las instancias de descubrimiento y las de justificación en el trabajo geométrico en un contexto escolar. El enfoque experimental puede ser motivador de un enfoque deductivo.

Problema Nº 1

Consideremos una regla de bordes paralelos de anchura *“d”*. Dados dos puntos A y B, con la distancia AB > *d*. Construir con esta regla un punto C tal que B sea el punto medio del segmento AC.

Resolución

Observemos que la regla permite trazar bandas de amplitud *d* formadas por dos rectas paralelas a distancia *d* una de otra.
Entonces trazamos una banda (*r*, *s*) tal que *r* pase por A y *s* por B.
Luego trazamos otra banda (*s*, *m*) de tal modo que *m* no coincida con *r*.
El punto C está en la intersección de *m* con la recta AB.

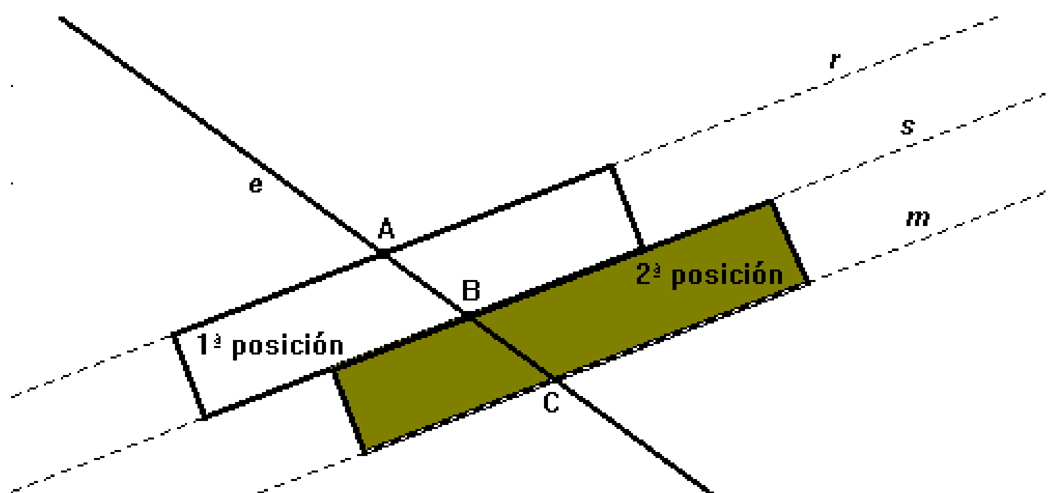

Figura 3

Justificación

Al ser las bandas (*r, s*) y (*s, m*) de igual anchura *d* , la recta *s* es la paralela media entre las paralelas *r* y *m*. Luego observamos que el segmento AC tiene sus extremos respectivamente en las paralelas *r* y *m* , por lo tanto el punto B , de intersección del segmento AC con la paralela media, es el punto medio del segmento. Entonces B es el punto medio del segmento AC.

Problema Nº 2

Consideremos una regla de bordes paralelos de anchura *"d"*. Dados dos puntos A y B, con la distancia AB **<** *d*. Construir con esta regla un punto C tal que B sea el punto medio del segmento AC.

Resolución

Observemos que al ser la distancia AB < *d* es imposible trazar una banda en la que sus rectas pasen respectivamente por A y por B.
Si le llamamos *r* a la recta AB, comenzamos trazando la banda (*r*, *r'*).
Luego trazamos las bandas (*e*, *e'*) y (*e'*, *e''*) secantes con la recta *r* , tal que el punto B pertenezca a la recta *e'*, y las rectas *e* y *e'* sean distintas. Donde estas bandas intersecan a la recta *r'* obtenemos los puntos P, M y Q que pertenecen respectivamente a las paralelas *e* , *e'* y *e''*.
Encontramos el punto K en la intersección de la recta PA con la recta *e'*.
Encontramos el punto C en la intersección de la recta QK con la recta *r*.

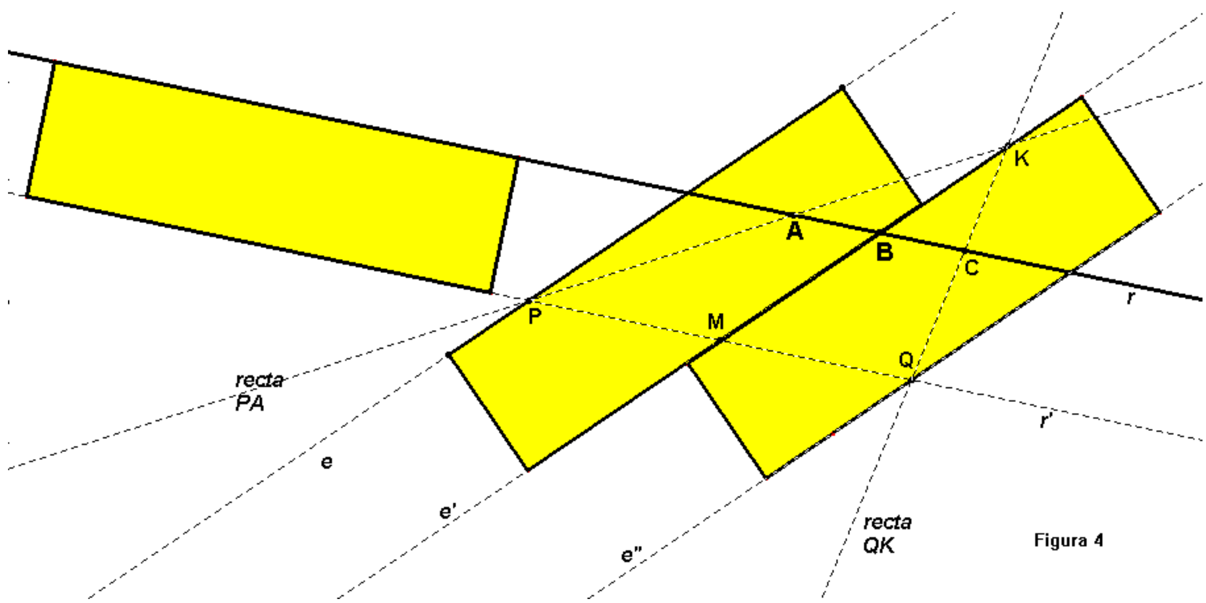

Figura 4

Justificación

Al ser las bandas (*e*, *e'*) y (*e'*, *e''*) de igual anchura "*d"*, la recta *e'* es la paralela media entre las paralelas *e* y *e''*. Luego observamos que el segmento PQ tiene sus extremos respectivamente en las paralelas *e* y *e''*, por lo tanto el punto M, de intersección de este segmento con la paralela media, es el punto medio del segmento PQ. Así queda demostrado que M es el punto medio del segmento PQ.

Observemos que por la construcción realizada los puntos A, B y C son los correspondientes, respectivamente, de los puntos P, M y Q en la proyección central de centro K de la recta *r'* sobre su paralela *r* . Sabemos que como consecuencia del teorema de Thales la proyección central de una recta sobre una paralela conserva los puntos medios, al ser M el punto medio del segmento PQ, su correspondiente, el B es el punto medio del segmento correspondiente, entonces B es el punto medio del segmento AC.

Algunas conclusiones

Los instrumentos disponibles al resolver un problema de construcción en Geometría son parte esencial del tipo de ideas a las que se accede.

En este mini-curso se presenta el trabajo con ideas geométricas a través de un "nuevo instrumento", *la regla de dos bandas*, que difiere de los tradicionales *regla y compás*.

Cuando trabajamos con la regla de dos bandas, las propiedades de las paralelas, las de los paralelogramos, el teorema de Thales y las proposiciones que se demuestran a partir de este teorema, adquieren especial relevancia.

En la "Geometría de la regla y el compás", las nociones de distancia son las que aparecen jerarquizadas.

Todo lo anterior nos conduce a una reflexión más general sobre el papel de los instrumentos: entendemos que la utilización de un determinado instrumento genera una reorganización del conocimiento. Porque, por un lado utilizar un instrumento implica separar la planificación de la ejecución, ya que se traslada el centro de atención a otro nivel generando problemas nuevos. Por otro lado no solo la estructura de la actividad se ve modificada, sino que también se producen cambios en los objetos sobre los que se trabaja, aunque, es muy claro que el contenido de la actividad tiene un papel constitutivo fundamental respecto de las ideas y conceptos que se obtienen a partir de ella.

Referencias

Chevallard, I.; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El Eslabón Perdido entre la Enseñanza y el Aprendizaje*, I.C.E. Universitat Barcelona. Horsori, Barcelona, pp.209 – 211.

Apéndice [1]

Construcciones con la regla de dos bordes paralelos

Problema 1

Consideremos una regla de dos bordes paralelos de anchura *d*. Dados dos puntos A y B, con la distancia AB > *d*, realizar con esta regla las siguientes construcciones:

a) Trazar un punto C tal que B sea el punto medio del segmento AC.

b) Trazar el punto medio del segmento AB.

c) Trazar la mediatriz del segmento AB.

d) Trazar la perpendicular a la recta AB que pasa por B.

e) Dados tres puntos no alineados A, B y C, trazar la bisectriz interior al ángulo CAB.

f) ¿Se pueden realizar las construcciones anteriores si partimos de dos puntos A y B tales que la distancia AB menor que *d*?

Problema 2

Utilizando sólo una regla con dos bordes paralelos de anchura *d*, realizar las siguientes construcciones:

a) Dada una recta AB y un punto P externo a la recta, trazar la paralela a la recta AB que pasa por P.

b) Dada una recta AB y un punto P externo a la recta, trazar la perpendicular a la recta AB que pasa por P.

c) Dado un segmento AB y un punto C sobre la recta AB, trazar un punto D tal que sean iguales las distancias CD y AB.

d) Dada una recta AB, una recta *r* distinta de la AB y un punto C sobre *r*, trazar otro punto D sobre *r* tal que sean iguales las distancias AB y CD.

e) Dado un segmento AB y un segmento AC' con longitud *b* menor que la distancia AB, trazar un triángulo ABC rectángulo en C cuyo lado AC tenga longitud *b*.

Problema 3

Se considera un triángulo ABC isósceles de lados iguales AB y BC de longitud *a* , cuya base AC tiene longitud *b*.

¿Se puede construir un triángulo ABC con una regla de dos bordes paralelos a partir de los datos siguientes?

a) Se da el ángulo en B opuesto a la base y la longitud *a* de los lados iguales.

b) Se da la longitud *b* de la base y la longitud *a* de los lados iguales (siendo $a>b/2$).

c) Se da la longitud *b* de la base y el ángulo opuesto B.

La "potencia" de la regla de dos bordes paralelos

Problema 1

Demostrar que, si partimos de tres puntos A, B, C no alineados o de dos puntos A, B tales que la distancia AB sea mayor o igual a *d*, entonces todo punto constructible con regla y compás a partir de A, B, C es también constructible con una regla de dos bordes paralelos de anchura *d*.

[1] Chevallard, I. ; Bosch, M. ; Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El Eslabón Perdido entre la Enseñanza y el Aprendizaje.*

Problema 2

¿Es cierto que toda figura constructible con una regla de dos bordes paralelos es constructible con regla y compás?